2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE

中华人民共和国教育部主管

数学教学研究

课堂评价中的“有所言有所不言” …… 蔡卫兵（封二）

钻得深一点，想得透一些——抛物线几何性质教学的断想 …… 陈立军 钱旭琴（7-3）

柯西不等式探究报告——《不等式选讲》教学札记 …… 朱浓 张忠文（7-6）

数学探究

圆锥曲线上四点共圆充要条件的研究 …… 张乃贵（7-8）

欧拉不等式的最简隔离及推广猜想 …… 罗奇（7-10）

提炼基本图形，妙解旋转问题——对一类旋转相似三角形的探究 …… 王同启（7-12）

对一道高考题的探究、引申 …… 姜坤崇（7-15）

在探究中发现，发现中探究 …… 周志国（7-19）

数学解题研究

不识庐山真面目 只缘身在此山中——一道好题的本质探究 …… 陈波（7-21）

一个抛物线问题的变式 …… 沈春林（7-24）

对一道数学高考题的研究 …… 玉邴图（7-27）

在解题过程中关注命题转化的等价性 …… 徐倩（7-30）

破解题设中的隐含条件 …… 刘占溪（7-32）

关于本刊“数学问题与解答”的几例探讨 …… 王玉怀（7-35）

考试之窗

2011年上海春考题再研究 …… 毛六明（7-37）

2012年普通高等学校招生全国统一考试理科数学（必修＋选修Ⅱ） …… （7-41）

2012年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷（理工农医类） …… （7-45）

编后漫笔

也谈中学里为什么要学微积分？ …… （封底）

ISSN 0488-7387



课堂评价中的"有所言有所不言"

315100 浙江省宁波市鄞州实验中学 蔡卫兵

数学课堂评价是教师对学生在数学课堂上的学习态度、方法、过程、效果等方面进行点评的过程,它主要起着反馈、激励、调控和导向的作用. 教师运用恰当的语言作出课堂教学即时评价能够点燃学生思维的火花,让理智与冲动交融,让智力与情感碰撞,让课堂焕发出生命的色彩,若是不恰当的语言便能凝固甚至扼杀学生的思维,导致评价效果大打折扣,甚至适得其反. 笔者在复习《圆的基本性质》时自编了一道自以为覆盖圆基本性质的主要知识点的"好题",因"有所言有所不言"的即时评价而出现了"有理有据的解法、五花八门的结果",由此发现"好题"是道"错题",同样是"有所言有所不言"的即时评价而促进了"紧急刹车"还是"顺势通过"的自编错题的再探究和再改编,可以说是精彩纷呈,实现了"言简意赅"、"言之有物"的和谐统一,从而达到"言语妙天下"的境界.

1. 有所言有所不言——课堂教学即时评价的时机性

作者的自编"好题":如图1,已知正方形$ABCD$内接于圆O,$\angle BAC$的平分线交圆O于点E,交BC于点P,连结BE. (1)求证$\Delta PEB\backsim\Delta BEA$; (2)若$PE=1$,$PA=3$,求圆$O$的半径$r$.

此题对于学生来说问题情境还是比较熟悉的,且题目中都是显性的条件,考查同圆中相等的圆周角所对的弧相等、等弧所对的圆周角相等、等弧对等弦、90°的圆周角所对的弦为直径、三角形相似的判定与性质和勾股定理,同时考查学生审图、分析图中边角关系的解题能力. 第(1)小题的解答略,以下是学生对于第(2)小题的解答.

生1答:由$\Delta PEB\backsim\Delta BEA$得$\dfrac{PE}{BE}=\dfrac{BE}{AE}$,$\therefore BE=2$. 连结$CE$,由$AE$平分$\angle BAC$得$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$,$\therefore CE=BE=2$. 由圆周角$\angle ABC=\angle AEC=90°$得$\mathrm{Rt}\Delta AEC$,$\therefore AC=2\sqrt{5}$. 根据90°的圆周角所对的弦为直径得$AC$为直径,$\therefore$圆$O$的半径$r=\sqrt{5}$.

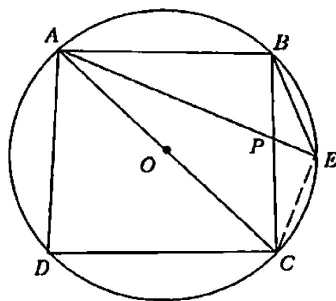


图1

师评:生1利用三角形相似的性质先求出BE,再利用与圆相关的性质、定理求出圆的直径和半径(这是教师预设的解题方案,但教师没有给予肯定或否定的评判).

生2答:我的答案是$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$,跟生1一样先求得$BE=2$,再由$\Delta PEB\backsim\Delta BEA$得$\dfrac{PB}{AB}=\dfrac{PE}{BE}=\dfrac{1}{2}$. 在$\mathrm{Rt}\Delta ABP$中根据勾股定理可求得$PB=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$,从而$AB=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. 在等腰$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中可求得$AC=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$,$\therefore$圆$O$的半径$r=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

师评:生2利用三角形相似的性质找到PB与AB是1:2的关系,再由勾股定理计算得出(这是出乎教师预设思路的解题方案,合情合理,虽然答案不一样,但教师还是没有给予肯定或否定的评判).

生3答:我的答案是$\sqrt{10}$,由生2的解答可知$\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{1}{2}$,即$PB=PC$. 在$\mathrm{Rt}\Delta PEC$中,根据勾股定理可求得$PB=PC=\sqrt{5}$,$\therefore AB=$

$BC=2\sqrt{5}$, $\therefore$ $AC=2\sqrt{10}$, $\therefore$圆O的半径$r=\sqrt{10}$.

生4答: 由生3的解答可知$PB=PC$, 再由$\triangle PEB\backsim\triangle PCA$得$\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PE}{PC}$, $\therefore$ $PB=PC=\sqrt{3}$, $\therefore$ $AB=BC=2\sqrt{3}$, $\therefore$ $AC=2\sqrt{6}$, $\therefore$圆O的半径$r=\sqrt{6}$.

生5答: 由生4的解答可知$PB=PC=\sqrt{3}$, 再由$\triangle PEB\backsim\triangle PCA$得$\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PE}{PC}=\dfrac{BE}{AC}$, 而$BE=2$, $\therefore$ $AC=2\sqrt{3}$, $\therefore$圆O的半径$r=\sqrt{3}$.

师评: 大家都持之有故, 言之有理, 为什么会是"有理有据的解法, 五花八门的结果"呢?

即时评价是在学生回答后立刻作出?还是在学生发言过程中打断学生而作出? 或是等一个讨论阶段结束而作出? 什么时候该评价? 什么时候可以缓一缓评价? 这就是课堂教学即时评价的时机性了. 有时可以让学生畅所欲言, 使其在与其他同学的交流中主动修正自己的观点, 共同构建完整的学习体系; 有时学生在知无不言、言无不尽中生成的观点也可能成为宝贵的教学资源; 有时教师故意设"圈套", 让学生顺着设计的思路往里面钻, 欲擒故纵, 欲抑先扬, 而教师不立即作出评价, 对他们的思维活动结果不过早表态, 等到最后学生恍然大悟时教师的评价无疑于"画龙点睛"了.

2. 言简意赅——课堂教学即时评价的精确性

精确性是指既要准确、到位, 又要简练、精练. 然而因为即时评价的"即兴", 导致课堂教学中不少教师的评价语言啰嗦, 轻率地重复学生或自己的话, 而大多数的口头重复却是低效甚至是无效的.

生6答: 由图可知, 点E为弧BC的中点, 显然点P为BC的中点是不可能的.

师评: 很好, 非等腰三角形的顶角平分线与底边上的中线不重合, $PB\neq PC$(这是问题原因的一个重要线索, 教师给予肯定的评价, 这里的评价具有启发性). 这到底是怎么回事呢? $PB\neq PC$, 但又可以推理出点P为BC的中点, 刚才是怎么得出点P为BC中点的?

生7答: 将$PE=1$, $PA=3$代入相似三角形对应边的比例式计算得出, 难道问题是出在题目本身的$PE=1$, $PA=3$的条件上吗?

师评: 分析得有道理. 为什么是条件$PE=1$与$PA=3$有问题呢?

生8答: 也许$PE=1$与$PA=3$是矛盾的条件, 不可能同时成立.

生9答: 是的, 设圆O是正方形$ABCD$的外接圆, 作$\angle BAC$的平分线交BC于点P, 交圆O于点E, PA的长一旦确定, PE的长也随之确定, 可能$\dfrac{PE}{PA}$不等于$\dfrac{1}{3}$?

师评: 思考得很深刻. 那$\dfrac{PE}{PA}$的值是多少呢?

生10答: 如图2, 连结OE交BC于点F, 由垂径定理可知$OE\perp BC$, $\therefore$ $EF/\!/AB$, $\therefore$ $\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{EF}{AB}$, 设$OF=FB=k$, 则$AB=2k$, $EF=OE-OF=(\sqrt{2}-1)k$, $\therefore$ $\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\neq\dfrac{1}{3}$.

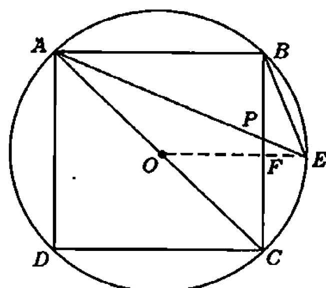


图2

师评: 分析得很精彩, 这说明$PE=1$与$PA=3$是矛盾的条件.

评析: 问题环环相扣, 学生终于明白"有理有据的解法, 五花八门的结果"的问题出自哪里, 在反驳中探求真理, 从错误中获得反思. 教师要善于从学生反馈的信息中, 敏锐地捕捉到其中的可利用之处、有价值之处, 即时给予肯定和表扬, 让学生得到思想上的启发和净化, 这样教学目标亦顺理成章地实现. 此过程中教师的即时评价要简练、字少语精、提纲挈领, 但充满理性、灵动和有效. 言简意赅, 是我们应追求的目标.

3. 言之有物——课堂教学即时评价的丰富性

对学生的发言, 教师要善于抓住其闪光点进行延伸, 恰当地评价, 多作描述性的评价, 多用一些富有个性的评价语言.

师: 我们根据上述的分析和探究, 能否改变一下问题的条件, 使其成为一个正确的问题呢?

生11答: 去掉原问题中 $PA=3$ 这个条件, 其他条件不变, 求圆 O 的半径 r.

师评: 反应真快! 你们看, 去掉 $PA=3$ 这个条件, 能否求出圆 O 的半径 r? 显然可根据 $\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ 先求出 $PA=2(\sqrt{2}+1)$, 进一步可求得 $CE=BE=\sqrt{2}+1$, $AC^2=CE^2+AE^2=20+14\sqrt{2}$, $r=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{20+14\sqrt{2}}$.

生12答: 如图3, 将原问题中正方形 $ABCD$ 改为矩形 $ABCD$, 其他条件不变, 求圆 O 的半径 r.

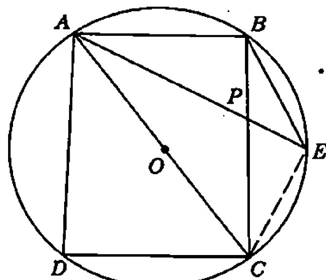


图3

师评: 有新意! 在四边形 $ABCD$ 为正方形的前提下 $PE=1$ 与 $PA=3$ 是矛盾的条件, 改为矩形, $PE=1$, $PA=3$ 能成立吗? 显然 $r=\sqrt{5}$, 此时 $AB=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, $BC=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

生13答: 如图4, Rt$\triangle ABC$ 内接于圆O, $\angle ABC=90°$, 其他条件不变, 求圆 O 的半径 r.

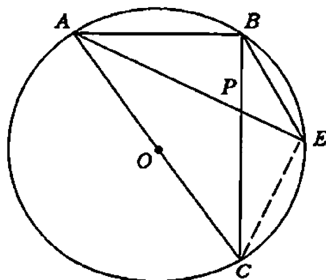


图4

师评: 其实在生12的改编中, 解答显然不涉及矩形 $ABCD$ 中的 Rt$\triangle ADC$ 部分, 生13的改编完全可以.

生14答: 如图5, 将生13的改编题中 $\angle ABC=90°$ 改为 $\angle ABC=60°$, 其他条件不变, 求圆 O 的半径 r.

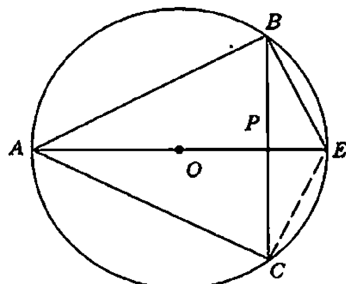


图5

师评: 将90°改为60°能否求出圆 O 的半径呢? 显然在 $\triangle ACE$ 中, $CE=2$, $AE=4$, $\angle AEC=60°$, 因此 $AC=2\sqrt{3}$, $\angle ACE=90°$, 所以 AE 为圆 O 的直径, 半径 $r=2$.

生15答: 如图6, 将生14的改编题中 $\angle ABC=60°$ 改为 $\angle BAC=60°$, 其他条件不变, 求圆 O 的半径 r.

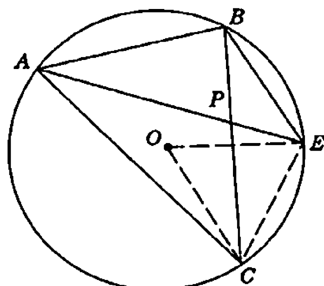


图6

师评: 如果已知 $\angle BAC=60°$, 可以求出圆 O 的半径吗? 显然可得 $\angle EOC=60°$, $\triangle OEC$ 为等边三角形, 而 $CE=2$, 所以半径 $r=2$.

生16答: 将 $\triangle ABC$ 中的 $\angle BAC=60°$ 改为 $\angle BAC=\alpha$, 其他条件不变, 用含 α 的三角函数式表示圆 O 的半径 r.

师评: 妙极了! 生16运用从特殊到一般的思想方法, 仍然可得 $\angle EOC=\alpha$, 而 $CE=2$, 所以半径 $r=\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

评析: 学生是灵动的集体, 蕴藏着巨大的

(下转第7—40页)

钻得深一点, 想得透一些
——抛物线几何性质教学的断想

211100　南京市江宁高级中学　陈立军　钱旭琴

1. 问题的提出

近日, 笔者所在备课组进行集体备课活动, 内容是研讨抛物线几何性质的教学. 多数老师认为可类比椭圆、双曲线的几何性质及研究方法, 结合抛物线的标准方程, 放手让学生自主来研究抛物线的几何性质. 但有老师提出, 椭圆的性质包括范围、对称性、顶点、离心率, 双曲线的性质包括范围、对称性、顶点、渐近线、离心率, 教材例2直接给出当灯泡安装在抛物线的焦点处时, 经反光曲面反射后的光线是平行光线, 如果课堂上有学生提出抛物线有没有渐近线, 离心率是多少, 经反光曲面反射的光线为什么是平行的, 怎么办? 其实这三个问题有清晰的"知识固着点"(抛物线的几何性质), 与学生的知识水平有一定的潜在距离, 如果我们能钻得深一点, 想得透一些, 这正是促进学生进行探究性学习、反思性学习的极好契机和素材.

2. 教学设计片段简述

实际教学中, 笔者对这三个问题分别采用了三种不同方式来"分而治之", 有效促进了学生积极、主动地思考探究. 问题1运用类比探究来解决, 问题2是通过引导学生对椭圆、双曲线标准方程推导过程的反思促进概念理解, 问题3激发学生课后自主探究, 开辟"第二课堂". 课堂上, 类比椭圆、双曲线的几何性质及研究方法, 结合抛物线的标准方程, 研究了抛物线的范围、对称性、顶点、开口方向, 随后笔者主动提出下面该研究抛物线的哪些性质? 学生很自然地问道, 抛物线有没有渐近线, 离心率是多少?

2.1 抛物线有没有渐近线?

很多同学随即给出猜想, 但学生之间自发地有了追问: 若有, 求出方程; 若没有, 为什么?为了帮助学生探究这个问题, 笔者先引导学生回顾双曲线中渐近线的概念和证明方法, 从中获得启发. 以方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为例, 其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, 即随着 x 的增大, 双曲线上的点无限接近于直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, 但永不相交. 具体说明的方法可以通过计算横坐标相同时对应点的纵坐标差, 也可以直接计算双曲线上的点到直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 的距离. 以第一种方法说明为例, 如图1, 设点 $M(x,y)$ 为双曲线在第一象限的点, 过点 M 作 $MN\perp x$ 轴, 垂足为点 $N(x,0)$, 直线 MN 交直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 于点 P, 则 $PM=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$. 显然, 当 x 趋于正无穷大时, $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 也趋于正无穷大, $\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$ 趋于0, 即 PM 的长趋于0, 但不会等于0. 这说明, 随着 x 的增大, 双曲线在第一象限内的点在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的下方且逐渐接近于这条直线. 因此, 直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 是双曲线的渐近线. 同理可以说明直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 也是双曲线的渐近线.

学生获得关于渐近线概念的理解和推导方法的启发后, 自然地将已有的知识经验和方法技能迁移到对新问题的探究上来. 设抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的渐近线方程为 $y=kx+b$ (根据直观, 不妨设 k、b 为正常数), 如图2, 设点 $M(x,y)$ 为抛物线在第一象限的点, 过点 M 作 $MN\perp x$ 轴, 垂足为

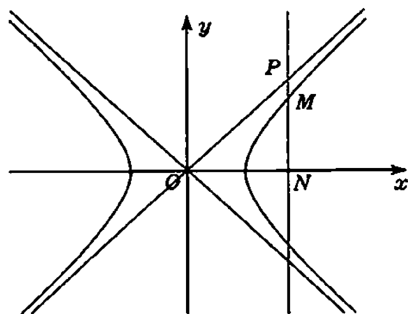


图1

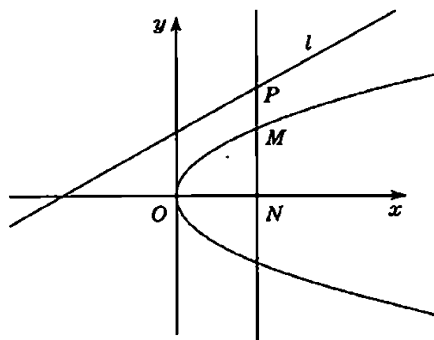


图2

点$N(x,0)$. 直线MN交直线$y=kx+b$于点P, 则$PM=kx+b-\sqrt{2px}$, 问题转化为当x趋于正无穷大时, PM的取值范围的讨论. 可令$\sqrt{2px}=t$, 则$x=\frac{t^2}{2p}$, 得$PM=\frac{k}{2p}t^2-t+b=\frac{k}{2p}\left(t-\frac{p}{k}\right)^2+b-\frac{p}{2k}$, 因为$k>0,p>0$, 所以$PM\geqslant b-\frac{p}{2k}$, 当$b=\frac{p}{2k}$且$t=\frac{p}{k}$时, $PM=0$. 这说明PM有可能为0, 且随着x的增大, PM越来越大. 如此就论证了抛物线确实不存在渐近线.

2.2 抛物线的离心率是多少?

对于这个问题, 课堂处理的方案有多种. 一是直接告诉学生结论; 二是先"冷一冷", 待到有了圆锥曲线统一定义后学生自然理解. 实际教学中, 笔者选择当堂引发认知矛盾, 引导学生深入反思学习过程, 促进学生的概念理解, 逐步完善学生的认知结构. 课堂教学实录如下:

师: 大家回忆一下, 椭圆、双曲线的离心率e是什么? 在抛物线中该如何定义离心率?

生1: 在椭圆、双曲线中$e=\frac{c}{a}$, 而抛物线中没有a和c, 所以抛物线没有离心率.

生2: 有, 抛物线的离心率$e=1$.

师: 你是怎么知道的?

生2: 昨天预习知道抛物线的离心率$e=\frac{MF}{d}$(F是抛物线焦点), 由抛物线的定义可知$MF=d$, 所以$e=1$.

师: 这位同学能提前预习, 值得大家学习, 很好. 现在我们知道椭圆、双曲线中离心率$e=\frac{c}{a}$, 而在抛物线中离心率$e=\frac{MF}{d}$(说到这, 教室有窃窃私语声), 有问题吗?

生3: 为什么离心率的定义不一致?

生2面有难色, 那大家怎么考虑? 笔者问道. 有学生在座位上小声嘀咕, 它们之间应该是一致的. 如何说明? 笔者继续追问. 稍顷, 笔者提示学生回顾椭圆、双曲线标准方程的推导过程, 看有没有新的发现.学生们立即在草稿纸上演算起来. 过了一会儿, 有学生举手示意.

生4: 以椭圆标准方程的推导为例, 由$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$移项后平方化简可得$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$, 将其变形为$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}$, 该式的几何解释即为平面内到定点$F(c,0)$和到定直线$l:x=\frac{a^2}{c}$的距离之比为$\frac{c}{a}$, 可视为$\frac{MF}{d}=e$. 这样, 与抛物线离心率的概念就一致了.

师: 非常好, 原来"一致性"早就隐在其中, 关键是我们要学会反思, 拥有一双善于发现的眼睛. 由此, 椭圆、双曲线、抛物线都可描述为平面内到定点和到定直线的距离的比是常数e的点的轨迹, 当$0<e<1$时, 轨迹为椭圆; 当$e=1$时, 轨迹为抛物线; 当$e>1$时, 轨迹为双曲线. 这就是圆锥曲线的统一定义.

2.3 从焦点射出的光线经反光曲面反射的光线为什么是平行的?

这个问题说明了抛物线具有的光学性质, 如图3, 它在日常生活中有着广泛的应用. 但教材中直接只是告知结论, 并没有讲清楚"为什么"; 有一定的探究空间, 笔者把这个问题留给学生课后自主探究, 隔日课上请学生交流探究的结果.

这个问题挑战性较大, 但还是有学生通过查阅资料、合作探究, 利用同一法证明. 为便于叙述, 我们选择抛物线的标准方程为$x^2=$

$2py\,(p>0)$, 即 $y=\dfrac{x^2}{2p}$, 如图4. 设 l 是过抛物线上一点 $D(x_0,y_0)$ 的切线, A、B 是直线 l 上的两点(分别在 D 两侧), 直线 DC 平行于 y 轴, 只需证得 $\angle FDA=\angle CDB$ 即可. 作抛物线的准线 $m: y=-\dfrac{p}{2}$, 延长 CD 交 m 于点 H, 由抛物线定义得 $DF=DH$, 且点 H 坐标为 $\left(x_0,-\dfrac{p}{2}\right)$, 当 $x_0\neq 0$ 时, 直线 l 的斜率 $k_l=\dfrac{x_0}{p}$, 直线 FH 的斜率 $k_{FH}=\dfrac{-\dfrac{p}{2}-\dfrac{p}{2}}{x_0}=-\dfrac{p}{x_0}$, 则 $k_l\cdot k_{FH}=-1$, 所以直线 l 垂直平分线段 FH, 则 $\angle FDA=\angle ADH=\angle CDB$. 当 $x_0=0$ 时, 结论显然成立. 综上所述, 结论成立.

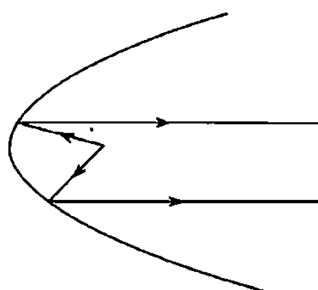


图3

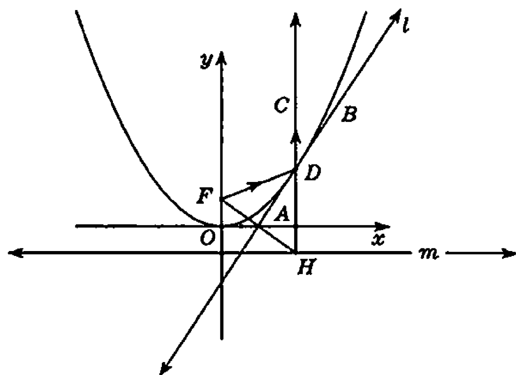


图4

3. 两点体会

3.1 钻得深一点, 需要多问几个为什么

多问几个为什么, 充分体现了数学学习的特点, 对培养学生的理性思维有很好的促进作用. 《普通高中数学课程标准(实验)》指出: “数学课程要讲逻辑推理, 更要讲道理”. 讲道理就是要讲清楚“为什么”, 不知道“为什么”的知识是肤浅的知识, 多问“为什么”是从假懂走向真懂的必经之路. 教学中有的老师说, 通过图像可以看出双曲线与抛物线是不同的, 它没有渐近线, 这是“强人所难”, 图像上根本看不出. 而且, 这样教学的危害性很大, 失去了数学学科严谨、缜密的特点. 相反, 当我问到如何画抛物线时, 有学生甚至回答是双曲线的一支. 《教参》中也只有一句话: “提醒学生注意, 抛物线不是双曲线的一支”. 如何提醒, 需要我们深入地挖掘, 追根求源, 利用它的教育价值, 成为点燃学生探究性学习的“导火索”.

多问几个为什么, 也是教会学生“提问题”的一种好方法. 爱因斯坦说: “提出一个问题往往比解决一个问题更重要, 因为解决问题也许仅仅是一个教学上或实验上的技能而已, 而提出新问题、新的可能性, 从新的角度去看旧的问题, 都需要创造性的想象力, 而且标志着科学的真正进步”. 但如何提出问题, 需要老师在教学中日益渗透方法, 首先应着力培养学生的问题意识, 其次才是辨别问题是有价值还是没有价值. 原先只有少数学生提出问题2.1, 而在其解决过程中, 师生、生生之间的追问、互问 (其实也是自问) 自发而又热烈, 对于教材例2中的结论“经反光曲面反射的光线是平行的”, 学生马上追问为什么? 这些就是学生“问题意识”的觉醒. 我们如果能在数学概念、定理、公式、法则等知识的形成过程中, 长期坚持“多问为什么”, 学生一定会拥有一双善于发现问题的“慧眼”.

3.2 想得透一些, 需要多问几个怎么办

多问几个怎么办, 可以把学生“卷入”到问题的解决过程中来 (南师附中特级教师陶维林老师语). 提出问题之后就需要解决问题. 解决问题, “教师包办”是不可取的, 而是要把“思考权”还给学生, 老师退居其次、隐在其后, 在不知不觉中恰时、恰点介入. 问题2.1中探求 PM 的范围时, 学生的思维得到激发, 活跃起来, 便沉醉于问题的解决. 有的采用如下更为简便的变形方法: $PM=kx+b-\sqrt{2px}=\dfrac{(kx-\sqrt{2px})(kx+\sqrt{2px})}{kx+\sqrt{2px}}+b=\dfrac{k^2x^2-2px}{kx+\sqrt{2px}}+b=\dfrac{k^2x-2p}{k+\sqrt{\dfrac{2p}{x}}}+b$, 显然从中可看出随着 x 的增大, PM 越来越大. 而如果选择抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$ 即 $y=\dfrac{x^2}{2p}$ 时, $PM=\dfrac{x^2}{2p}-kx-b$, 由二次函数的性质理解 PM 的范

(下转第7-14页)

柯西不等式探究报告
——《不等式选讲》教学札记

015200 内蒙古磴口县一中 朱 浓 张忠文

人教A版教材选修4-5《不等式选讲》的最后一节是“学习总结报告”，要求学生谈谈学习本专题的感受、体会、看法. “希望同学们通过本书的学习，在数学知识的积累、数学能力的提高、对数学的理解和认识方面都能再上一个新台阶.”[1] 据此，笔者要求选修本专题的学生，就柯西不等式，以教材为依托，通过查阅资料、访问求教等方法，在共同研究或独立思考后，完成一篇探究报告. 建议学生可从以下三个方面进行探究:

(1) 从知识链上，寻求二维柯西不等式的多种证明，并指出其几何意义及数学背景.

(2) 哪些证法可迁移到一般柯西不等式? 该不等式还能拓展吗?

(3) 联系教材相关习题，探讨其应用.

一周后，学生交来十多份报告，他们得到一些很有创意的成果. 这里仅就该不等式的证明，节录相关的片断.

1. 二维柯西不等式的另证及背景

对二维柯西不等式，除教材中的证明外，学生还搜集到以下证法.

证1: 在直角坐标系中，取点 $A(a,b)$、$B(c,d)$ 或 $(-c,-d)$，如图1，由 $|OA|+|OB|\geqslant|AB|$ 得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a\mp c)^2+(b\mp d)^2}$$
$$\Longleftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac+bd|,\ \text{即有}$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2.$$

易知当且仅当 A、O、B 三点共线，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 时取等号.

由上可见，不等式的一个几何背景是: 三角形的两边之和大于第三边.

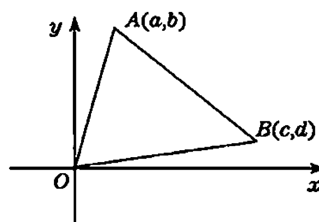


图1

证2: 设点 $P(c,d)$ 是直线 $l: ax+by=0$ 外一点，如图2，过点 P 作 $PQ\perp l$ 交 l 于点 Q，由 $|PQ|\leqslant|PO|$ 得 $\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$，故有 $|ac+bd|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$，平方即得. 当且仅当 $PO\perp l$ 即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 时等号成立. 故该不等式的另一几何背景是: 点到直线的垂线段最短.

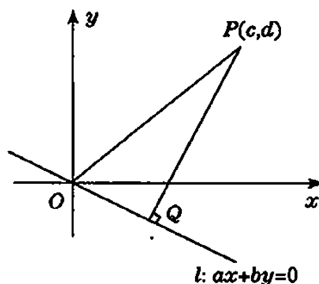


图2

【点评】三角不等式是柯西不等式的等价形式，教材中用柯西不等式证明了三角不等式(P34, 定理3). 上述另证，用三角不等式证明柯西不等式，直观、简洁.

证3: 设 $a^2+b^2=r_1^2$、$c^2+d^2=r_2^2$，令 $a=r_1\cos\theta$、$b=r_1\sin\theta$、$c=r_2\cos\varphi$、$d=r_2\sin\varphi$. 则有 $(ac+bd)^2=r_1^2r_2^2\cos^2(\theta-\varphi)\leqslant r_1^2r_1^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

证4: 令 $a^2+b^2=m^2$、$c^2+d^2=n^2(mn\neq 0)$，有 $\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{m^2}=1$，$\frac{c^2}{n^2}+\frac{d^2}{n^2}=1$. 由基本不

等式得 $\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{n^2}\geqslant\frac{2|ac|}{|mn|}$, $\frac{b^2}{m^2}+\frac{d^2}{n^2}\geqslant\frac{2|bd|}{|mn|}$, 两式相加有 $|mn|\geqslant|ac|+|bd|\geqslant|ac+bd|$, 两边平方即得.

【点评】上述另证借助三角函数的有界性或利用基本不等式, 使柯西不等式纳入原认知结构. 在这个专题里"更为重要的是理解这些不等式的数学思想和背景", "尽力使用几何或其他方法来证明这些不等式",[2] 在方法上要注意数与形的结合. 因此上述另证, 是值得肯定的.

2. 一般柯西不等式及推广

一般柯西不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$, 教材给出一个经典的证明: 构造一个二次函数, 配方后得出函数的值域为非负数, 再由其判别式得到. 方法易懂, 但总给人突兀的感觉. 为寻求更自然些的证明, 以下探究也值得称道、

(1) 教材中的证明, 本质是"配方", 即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, 三维柯西不等式也可类似证明. 有同学查到它的一般形式是拉格朗日(Lagrange)恒等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2+\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

[3], 这是柯西不等式的代数背景.

(2) 一个三维柯西不等式的证明: $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=[(\sqrt{a_1^2+a_2^2})^2+a_3^2]\cdot[(\sqrt{b_1^2+b_1^2})^2+b_3^2]\geqslant(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}+a_3b_3)^2\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$.

【点评】这里实际上已经完成用"数学归纳法"证明一般柯西不等式的递推.

(3) 利用基本不等式得到的另证4, 显然可迁移到一般柯西不等式, 不再赘述.

(4) 类比二维柯西不等式, 猜测: 对正实数 a_i、b_i、$c_i(i=1、2、3)$ 有:

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{3}c_i^3\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_ic_i\right)^3$$

成立. 这个不等式是容易证明的.

证: 设 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^3=m^3$、$\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^3=n^3$、$\sum\limits_{i=1}^{3}c_i^3=t^3$ $(m、n、t\in\mathbf{R}^+)$, 则 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^3}{m^3}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^3}{n^3}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}c_i^3}{t^3}=1$, 由不等式

$x^3+y^3+z^3\geqslant3xyz(x、y、z\in\mathbf{R}^+)$ 得

$\frac{a_i^3}{m^3}+\frac{b_i^3}{n^3}+\frac{c_i^3}{t^3}\geqslant3\left(\frac{a_ib_ic_i}{mnt}\right)$, $i=1、2、3$.

以上三式相加, 有 $\frac{3}{mnt}(\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_ic_i)\leqslant3$,故 $mnt\geqslant\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_ic_i\Longleftrightarrow m^3n^3t^3\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_ic_i\right)^3$.

(5) 进而想到柯西不等式还可拓展为:

若 $a_i,b_i,c_i\in\mathbf{R}^+$、$i=1,2,3,\cdots,n$, 则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^3\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^3\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_ic_i\right)^3$.

(6) 更一般地, 有 $k\times n$ 维的柯西不等式:

若 $a_{ij}\in\mathbf{R}^+$、$i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,k$, 则有:

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^k\right)\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k}a_{ij}\right)\right]^k.$$

【点评】证明上述两式, 可仿照(4), 利用不等式 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_k^k\geqslant kx_1x_2\cdots x_k$ 即得. (4)、(5)、(6)的探究, 形成相互关联的不等式链, 且证明这些不等式的方法都源于另证4.

3. 感悟

引导学生进行探究性学习, 首先要选择好课题, 围绕教材内容适当选取, 学生比较容易入手. 其次问题情景设置要具体, 有一定的层次, 使学生知道要做什么, 该怎么去做. 还要给他们充足的时间, 注意适时点拨, 包括推荐一些相关资料等, 但不要替他们去做.

探究不同于总结, 不必求全, 应重在对数学知识的应用和迁移, 理解数学本质. 教师要及时做好讲评, 成果的加工、整理和交流, 以收到较好的教学效果.

参考文献

[1] 普通高中课程标准实验教科书数学(选修4-5)不等式选讲(A版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.

[2] 教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.

[3] 唐秀颖. 数学解题辞典. 代数[M]. 上海: 上海辞书出版社, 1985.

圆锥曲线上四点共圆充要条件的研究

225700 江苏省兴化中学(徐州师范大学2009级教育硕士) 张乃贵

笔者最近在研究圆锥曲线有关问题时, 发现了圆锥曲线上四点共圆的一个充要条件. 现将其整理成文, 与大家交流. 为叙述的方便、简洁起见, 本文约定: 1. 文中所涉及的所有直线的斜率都存在; 2. 用 k_{AB} 表示直线 AB 的斜率.

我们首先来证明两个命题.

命题1 抛物线 $y^2=2px$ 的内接四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线中, 只要有一对直线的倾斜角互为补角, 则另两对直线的倾斜角也分别互为补角.

证明: 由字母 A、B、C、D 的轮换对称性可知, 只需证明 $k_{AB}+k_{CD}=0$ 可推出 $k_{BC}+k_{DA}=0$, 以及 $k_{AC}+k_{BD}=0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上的任意四点,

则 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_2+y_1}$,

同理 $k_{BC}=\dfrac{2p}{y_2+y_3}$, $k_{CD}=\dfrac{2p}{y_3+y_4}$, $k_{DA}=\dfrac{2p}{y_1+y_4}$, $k_{AC}=\dfrac{2p}{y_1+y_3}$, $k_{BD}=\dfrac{2p}{y_2+y_4}$.

$\because k_{AB}+k_{CD}=0$,

$\therefore k_{AB}=-k_{CD}$,

$\therefore \dfrac{2p}{y_2+y_1}=-\dfrac{2p}{y_3+y_4}$,

$\therefore y_1+y_2+y_3+y_4=0$.

$\therefore k_{BC}=\dfrac{2p}{y_2+y_3}=-\dfrac{2p}{y_1+y_4}=-k_{DA}$,

$k_{AC}=\dfrac{2p}{y_1+y_3}=-\dfrac{2p}{y_2+y_4}=-k_{BD}$.

即 $k_{BC}+k_{DA}=0$, $k_{AC}+k_{BD}=0$.

命题2 圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1(mn\neq 0)$ 的内接四边形的两组对边, 两条对角线所在的三对直线中, 只要有一对直线的倾斜角互为补角, 则另两对直线的倾斜角也分别互为补角.

证明: 由字母 A、B、C、D 的轮换对称性可知, 只需证明 $k_{AB}+k_{CD}=0$ 可推出 $k_{AC}+k_{BD}=0$, 以及 $k_{BC}+k_{DA}=0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 是圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1$ 上的任意四点, 又设直线 AB、CD 的斜率分别为 k、$-k$, 方程分别为 $y=kx+b_1$、$y=-kx+b_2$,

将 $y=kx+b_1$ 代入 $mx^2+ny^2=1$, 消去 y 并整理得

$(nk^2+m)x^2+2knb_1x+nb_1^2-1=0$,

设 x_1、x_2 是此方程的两个根, 由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\dfrac{-2knb_1}{nk^2+m}$, $x_1x_2=\dfrac{nb_1^2-1}{nk^2+m}$.

在上式中同时以 $-k$ 代 k, b_2 代 b_1 得

$x_3+x_4=\dfrac{2knb_2}{nk^2+m}$, $x_3x_4=\dfrac{nb_2^2-1}{nk^2+m}$.

$$\begin{aligned}y_3-y_1&=-kx_3+b_2-(kx_1+b_1)\\&=-k(x_1+x_3)+(b_2-b_1).\end{aligned}$$

同理 $y_4-y_2=-k(x_2+x_4)+(b_2-b_1)$.

$$\begin{aligned}&k_{AC}+k_{BD}=0\\
\Longleftrightarrow&\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}+\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}=0\\
\Longleftrightarrow&(y_4-y_2)(x_3-x_1)+(y_3-y_1)(x_4-x_2)=0\\
\Longleftrightarrow&[-k(x_2+x_4)+(b_2-b_1)](x_3-x_1)+\\
&[-k(x_1+x_3)+(b_2-b_1)](x_4-x_2)=0\\
\Longleftrightarrow&-k[(x_2+x_4)(x_3-x_1)+(x_1+x_3)(x_4-\\
&x_2)]+(b_2-b_1)(x_3+x_4-x_1-x_2)=0\\
\Longleftrightarrow&-2k(x_3x_4-x_1x_2)+(b_2-b_1)\\
&(x_3+x_4-x_1-x_2)=0\\
\Longleftrightarrow&-2k\left(\frac{nb_2^2}{nk^2+m}-\frac{nb_1^2}{nk^2+m}\right)\end{aligned}$$

$$+(b_2-b_1)\left(\frac{2knb_2}{nk^2+m}-\frac{-2knb_1}{nk^2+m}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow\frac{-2kn(b_2^2-b_1^2)}{nk^2+m}+\frac{2kn(b_2^2-b_1^2)}{nk^2+m}=0,$$

该式显然成立, 得证.

上述证明自然平实, 无任何技巧, 属通性通法. 从常规的思维出发, 用最基本的方法解决问题, 应该成为我们的解题追求.

类似地可以证明 $k_{BC}+k_{DA}=0$, 故 $k_{BC}+k_{DA}=0$, $k_{AC}+k_{BD}=0$.

说明: 在命题2中, 当 $m=n>0$ 时, $mx^2+ny^2=1$ 表示圆; 当 $m>0, n>0, m\neq n$ 时, $mx^2+ny^2=1$ 表示椭圆; 当 $mn<0$ 时, $mx^2+ny^2=1$ 表示双曲线.

有趣的是笔者进一步研究时发现, 满足性质的四边形恰巧是圆的内接四边形.

如图1, 由于规定了所有直线的斜率都存在, 如果四边形 $ABCD$ 中有一条边平行 x 轴, 那么易证 $ABCD$ 是等腰梯形或矩形, 显然 A、B、C、D 共圆. 如果四边形 $ABCD$ 的边所在的直线 AB、BC、CD、AD 分别交 x 轴于点 E、F、G、H, 若直线 AB、CD 的倾斜角互为补角, 则由性质知直线 AD、BC 的倾斜角也互为补角, 因此易得 $\angle DHG=\angle BFE$, $\angle DGH=\angle BEF$. 在 $\triangle DHG$、$\triangle BFE$ 中根据三角形内角和定理得 $\angle HDG=\angle FBE$, 即 $\angle HDC=\angle ABC$, 所以 A、B、C、D 四点共圆.

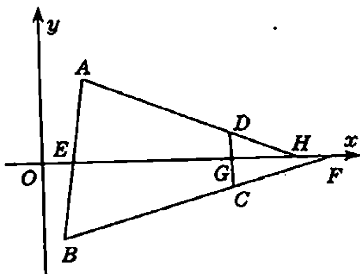


图1

结合命题1、2, 我们有:

命题3 抛物线 $y^2=2px$ 的内接四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线中, 只要有一对直线的倾斜角互为补角, 则该四边形同时内接于圆.

命题4 圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1\,(mn\neq 0)$ 的内接四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线中, 只要有一对直线的倾斜角互为补角, 则该四边形同时内接于圆.

命题3、4新颖有趣, 沟通了圆和圆锥曲线之间的奇妙联系, 将数学的美演绎得淋漓尽致! 值得我们进一步思考的是:圆锥曲线上的四点若内接于圆, 那么这四点组成的四边形的两组对边、两条对角线共三对直线的倾斜角是否一定互补呢? 经研究, 我们得到:

命题5 若抛物线 $y^2=2px$ 与圆相交于四点, 则这四点组成的四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线的倾斜角分别互补.

证明: 由命题1知, 只要证明到三对直线中有一对直线的倾斜角互补, 则结论成立.

如图2, 记直线 AB、DC 的交点为 $P(x_0,y_0)$, 分别设它们的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha,\end{cases}$ $\begin{cases}x=x_0+t\cos\beta,\\ y=y_0+t\sin\beta.\end{cases}$ $\alpha\neq\beta$.

将 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $y^2=2px$ 并整理得

$$t^2\sin^2\alpha+2(y_0\sin\alpha-p\cos\alpha)t+y_0^2-2px_0=0,$$

$\therefore\ t_1t_2=\dfrac{y_0^2-2px_0}{\sin^2\alpha}$, 即 $|PA|\cdot|PB|=\left|\dfrac{y_0^2-2px_0}{\sin^2\alpha}\right|$.

同理, $|PC|\cdot|PD|=\left|\dfrac{y_0^2-2px_0}{\sin^2\beta}\right|$.

由圆的切割线定理知 $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$,

$$\therefore\left|\frac{y_0^2-2px_0}{\sin^2\alpha}\right|=\left|\frac{y_0^2-2px_0}{\sin^2\beta}\right|,$$

则 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$, 由于 α、β 互不相等, 所以 $\alpha=\pi-\beta$, 得证.

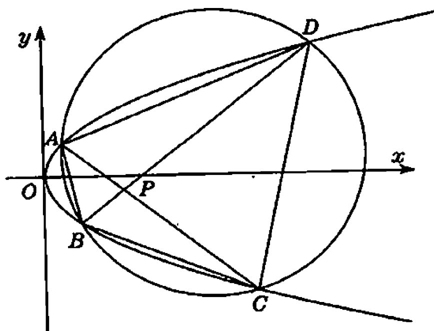


图2

命题6 圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1(mn\neq 0, m\neq n)$ 与圆相交于四点, 则这四点组成的四边

欧拉不等式的最简隔离及推广猜想

541002 广西省桂林师范高等专科学校数学与计算机科学系 罗 奇

设$\triangle ABC$的外接圆半径为R, 内切圆半径为r, 则有$R \geqslant 2r$, 当且仅当$\triangle ABC$为等边三角形时等号成立. 此即欧拉不等式. 多年来, 我国数学教育界对此不等式进行了广泛和深入的研究, 给出了该不等式的多种加强和推广的结论. 笔者最近用几何画板进行了一些探究, 发现了它的最简隔离!

设$\triangle ABC$的面积、三内角、内切圆、外接圆、$\triangle ABC$的旁切圆圆心分别为S、A、B、C、O、O'、O_1, O_2, O_3, 内切圆、外接圆、$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆、外接圆半径分别为r、R以及r'、R'

如图1, 在几何画板中按以下步骤作图: ①作出$\triangle ABC$以及$\triangle ABC$内切圆$\odot O(r)$和

形的两组对边、两条对角线所在的三对直线的倾斜角分别互补.

证明: 以椭圆为例, 如图3所示, 由命题2知, 只要证明到三对直线中有一对直线的倾斜角互补, 则结论成立.记直线AB、DC的交点为$P(x_0,y_0)$, 分别设它们的参数方程为
$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\beta, \\ y = y_0 + t\sin\beta. \end{cases}$

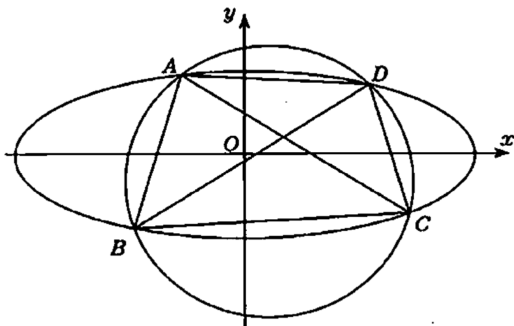


图3

将$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$代入$mx^2+ny^2=1$并整理得

$$(m\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha)t^2 + 2(mx_0\cos\alpha + ny_0\sin\alpha)t + mx_0^2 + ny_0^2 - 1 = 0,$$

$\therefore\ t_1t_2 = \dfrac{mx_0^2+ny_0^2-1}{m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha}$, 即$|PA|\cdot|PB| = \left|\dfrac{mx_0^2+ny_0^2-1}{m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha}\right|$.

同理, $|PC|\cdot|PD| = \left|\dfrac{mx_0^2+ny_0^2-1}{m\cos^2\beta+n\sin^2\beta}\right|$.

由圆的切割线定理知$|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$,

$$\therefore \left|\frac{mx_0^2+ny_0^2-1}{m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha}\right| = \left|\frac{mx_0^2+ny_0^2-1}{m\cos^2\beta+n\sin^2\beta}\right|.$$

若圆锥曲线为椭圆, 则$m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha$、$m\cos^2\beta+n\sin^2\beta$同时为正,

$\therefore\ m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha = m\cos^2\beta+n\sin^2\beta$;

若圆锥曲线为双曲线, 注意到有向线段$\overline{PA}$、$\overline{PB}$之积与$\overline{PC}$、$\overline{PD}$之积同号, 所以$m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha$、$m\cos^2\beta+n\sin^2\beta$同时为正或同时为负, 因此, 仍有$m\cos^2\alpha+n\sin^2\alpha = m\cos^2\beta+n\sin^2\beta$.

$\therefore\ m(1-\sin^2\alpha)+n\sin^2\alpha = m(1-\sin^2\beta)+n\sin^2\beta$,

$(m-n)\sin^2\alpha = (m-n)\sin^2\beta$,

注意到$m\neq n, \alpha\neq\beta$, 所以$\alpha = \pi-\beta$, 得证.

这样, 我们便得到了圆锥曲线的内接四边形同时内接于圆的充要条件:

命题7 抛物线$y^2=2px$的内接四边形同时内接于圆的充要条件是该四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线中一对直线的倾斜角互补.

命题8 圆锥曲线$mx^2+ny^2=1(mn\neq 0, m\neq n)$的内接四边形同时内接于圆的充要条件是该四边形的两组对边、两条对角线所在的三对直线中一对直线的倾斜角互补.

外接圆$\odot P(R)$; ②作出$\triangle ABC$的旁切圆圆心O_1、O_2、O_3; ③以点O_1、O_2、O_3为顶点作三角形$\triangle O_1O_2O_3$以及$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆$\odot O'(r')$; ④选取一个定点Q, 以点Q为圆心, 分别以$2r$、r'、R为半径构造三个线条粗细不同的同心圆; ⑤分别度量$2r$、r'、R的值; ⑥拖动顶点A, 观察三个同心圆的大小以及$2r$、r'、R数值变化情况, 可以明显看到: $R\geqslant r'\geqslant 2r$, 当且仅当$\triangle ABC$为等边三角形时等号成立.

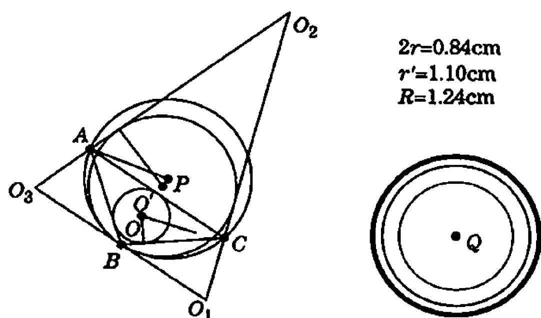


图1

定理 设$\triangle ABC$的内切圆、外接圆、以及以$\triangle ABC$的旁切圆圆心O_1、O_2、O_3为顶点的$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆半径分别为r、R以及r', 则有$R\geqslant r'\geqslant 2r$, 当且仅当$\triangle ABC$为等边三角形时等号成立.

证明:

$$\because S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=\frac{r(a+b+c)}{2},$$

$$\therefore \frac{(2R)^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=\frac{2Rr(\sin A+\sin B+\sin C)}{2},$$

$$\therefore \frac{r}{R}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}$$

将式中$\cos\frac{A+B}{2}$展开, 并代入化简后, 上式$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C-1,$$

$$\therefore \frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1.$$

同理可得

$$\frac{r'}{R'}=\cos\angle O_1+\cos\angle O_2+\cos\angle O_3-1.$$

如图2, $\because$点O、O_1分别是ABC的内切圆、旁切圆圆心, $\therefore BO_1\perp OB$, $CO_1\perp OC$,

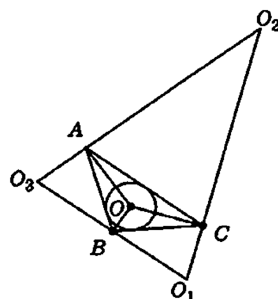


图2

于是$\angle O_1=\pi-\angle BOC$

$$=\pi-\left(A+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\frac{\pi-A}{2}.$$

同理$\angle O_2=\frac{\pi-B}{2}$, $\angle O_3=\frac{\pi-C}{2}$.

$\therefore$在$\triangle O_1O_2O_3$中有

$$\frac{r'}{R'}=\cos\frac{\pi-A}{2}+\cos\frac{\pi-B}{2}+\cos\frac{\pi-C}{2}-1,$$

$$\therefore \frac{r'}{R'}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1$$

$$\geqslant\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-1\right)$$

(下转第7-34页)

提炼基本图形, 妙解旋转问题

——对一类旋转相似三角形的探究

201101　上海市上宝中学　王同启

在习题课的教学中, 要提高课堂教学的有效性, 关键要教给学生将复杂问题简单化, 在较短的时间内抓住问题的本质, 这样可以达到举一反三、触类旁通的目的. 这一切都需要教师在教学过程中不断地培养学生发掘、提炼、总结基本图形, 以达到"做一题, 通一类, 会一片"的效果, 从而提高学生的数学素养和创造性地解决问题的能力. 本文展示一类旋转相似三角形在解题中的广泛应用.

基本图形: (上海教育出版社九年级第一学期数学第32页) 已知: 如图1, $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. 求证: $\triangle ADB\backsim\triangle AEC$.

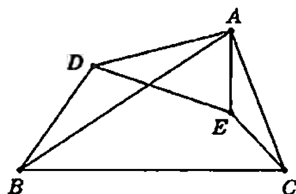


图1

简析: 由 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, 可得 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$, 从而可得 $\angle DAE=\angle BAC$, 所以 $\angle DAB=\angle EAC$, 再由 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$, 可得出 $\triangle ADB\backsim\triangle AEC$.

结论: 当 $\triangle ADE$ 绕它的顶点A旋转一定的角度且它的两边AD、AE按一定的比例放大或缩小后得到的 $\triangle ABC$ 与原 $\triangle ADE$ 相似. 从而又生成 $\triangle ADB\backsim\triangle AEC$.

一、基本应用

在解决这类问题时, 首先要识别出基本图形, 从而找出一个三角形绕一个顶点旋转得到另一个和它相似的三角形, 从而找出生成的另一对相似三角形.

例1. (2012年上海市宝山区九年级数学第一学期期末测试卷第18题) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=9$, $\cos A=\frac{2}{3}$, 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转, 使得点 A 落在点 A', 点 B 落在点 B'. 若点 A' 在边 AB 上, 则点 B 与点 B' 的距离为________.

简析: 原题没有给出图形, 根据题意画出如图2的图形, 由 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到 $\triangle A'B'C$, 由基本图形可知 $\triangle CAA'\backsim\triangle CBB'$, 要求 BB' 的长, 只需求出 AA' 的长即可. 过点 C 作 $CH\perp AB$, 垂足为点 H, 利用 $\triangle AHC\backsim\triangle ACB$, 可求出 $AH=4$, 所以可得 $AA'=8$, 所以由 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{AC}{CB}$, 可求得 $BB'=4\sqrt{5}$.

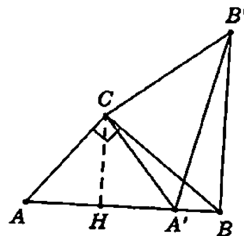


图2

点评: 学生在做此题时, 浪费了很多时间, 主要是没有发现 $\triangle CAA'\backsim\triangle CBB'$. 因此, 如果熟悉上面的基本图形, 由 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到 $\triangle A'B'C$, 从而有 $\triangle CAA'\backsim\triangle CBB'$, 就能在很短时间内抓住问题的本质, 也就很容易求解了.

例2 (2008年北京市门头沟区中考数学一模试卷) 如图3, 在等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 点 O 既是边 AC 的中点, 又是边 A_1C_1 的中点, 求 AA_1: BB_1 的值.

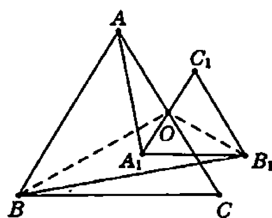


图3

简析: 连结OB、OB_1, 由基本图形可知, $\triangle AOB$绕点O旋转变换得到$\triangle A_1OB_1$, 从而有$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$, 这两个三角形的相似比为$AA_1:BB_1=OA:OB=1:\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

点评: 本题在求AA_1:BB_1的值时, 很多同学不知从哪一方面下手, 有的同学虽然连结了OB、OB_1, 但没发现$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$. 本题的关键是发现基本图形: $\triangle AOB$绕点O旋转变换得到$\triangle A_1OB_1$, 从而$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$, 寻找出边$AA_1$、$BB_1$所在的两个三角形相似, 从而答案可求.

例3 (2011年上海市普陀区初三统一考试卷) 如图4, 直角三角板ABC中, $\angle A=30°$, $BC=1$. 将其绕直角顶点C逆时针旋转一个角$\alpha\,(0°<\alpha<90°)$, 得到$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C$, 在三角板旋转的过程中, 边$A'C$与$AB$所在直线交于点$D$, 过点$D$作$DE/\!/A'B'$交$CB'$边于点$E$, 连结$BE$, 设$AD=x$, $BE=y$, 求y与x之间的函数解析式及定义域.

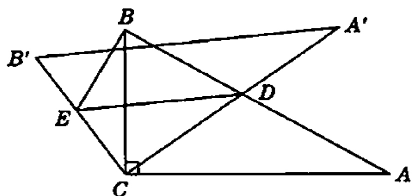


图4

简析: 当$0°<\alpha<90°$时, 点D在AB边上.

$\because DE/\!/A'B'$,

$\therefore \dfrac{CD}{CA'}=\dfrac{CE}{CB'}$.

由旋转性质可知, $CA=CA'$, $CB=CB'$, $\angle ACD=\angle BCE$.

$\therefore \dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CE}{CB}$,

$\therefore \dfrac{CD}{CE}=\dfrac{CA}{CB}$,

$\therefore \triangle CAD\backsim\triangle CBE$.

$\therefore \dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$.

$\because \angle A=30°$,

$\therefore \dfrac{y}{x}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\,(0<x<2)$.

点评: 通过批阅试卷, 可以发现学生对基本图形不熟悉, 没有发现$\triangle CAD\backsim\triangle CBE$. 此题可认为$\mathrm{Rt}\triangle ACB$绕点$C$旋转得到$\mathrm{Rt}\triangle A'CB'$, 又因为$DE/\!/A'B'$, 可以得到$\mathrm{Rt}\triangle DCE\backsim\mathrm{Rt}\triangle A'CB'$,因此可认为$\mathrm{Rt}\triangle ACB$通过旋转变换得到$\mathrm{Rt}\triangle DCE$, 从而生成$\triangle CAD\backsim\triangle CBE$.

二、拓展应用

会识别上面的基本图形后, 在解决较复杂的问题时, 可以构造出上面的基本图形, 把复杂的问题简单化.

例4 (2010年全国数学竞赛题) 如图5, 在$\triangle ABC$中, $\angle BAC=60°$, $AB=2AC$. 点P在$\triangle ABC$内, 且$PA=\sqrt{3}$, $PB=5$, $PC=2$, 求$\triangle ABC$的面积.

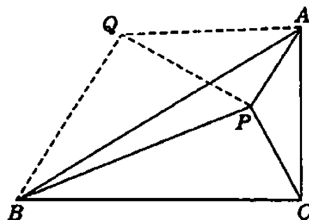


图5

简析: 由$\angle BAC=60°$, $AB=2AC$易得$\angle ACB=90°$.

如图5, 作$\triangle ABQ$, 使得$\angle QAB=\angle PAC$, $\angle ABQ=\angle ACP$, 则$\triangle ABQ\backsim\triangle ACP$, 从而可得$\triangle ACB\backsim\triangle APQ$.

由于$AB=2AC$, 所以

$AQ=2AP=2\sqrt{3}$, $BQ=2CP=4$.

$\angle QAP=\angle BAC=60°$.

由$\angle ACB=90°$知$\angle APQ=90°$, 于是$PQ=\sqrt{3}AP=3$.

所以$BP^2=25=BQ^2+PQ^2$, 从而$\angle BQP=90°$. 于是

$AB^2=PQ^2+(AP+BQ)^2=28+8\sqrt{3}$.

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}AB^2=\dfrac{6+7\sqrt{3}}{2}$.

点评: 本题中要求$\triangle ABC$的面积, 虽然可证出$\triangle ABC$是直角三角形, 但缺少边长, 如果能求出$\triangle ABC$的任何一边即可. 由$\angle BAC = 60^\circ$, 可巧妙地利用这个角度构造相似三角形, 同时也不破坏这个特殊角, 可以利用基本图形构造相似三角形, 作$\triangle ABQ$, 使得$\angle QAB = \angle PAC$, $\angle ABQ = \angle ACP$, 则$\triangle ABQ \backsim \triangle ACP$, 从而可得$\triangle ACB \backsim \triangle APQ$, 因此可得到$BQ = 4$, $AQ = 2\sqrt{3}$, $PQ = 3$, 所以可证得$\angle BQP = 90^\circ$, 所以由$AB^2 = PQ^2 + (BQ + AP)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$, 再由$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60^\circ$, 从而可求出$\triangle ABC$的面积.

例5 如图6, 已知三条平行线l_1、l_2、l_3, l_1与l_2、l_2与l_3、l_3与l_1之间的距离分别为h_1、h_2、h_3 $(0 < h_1 < h_2, h_3 = h_1 + h_2)$, 求作等边$\triangle ABC$, 使它的三个顶点分别落在这三条平行线上.

简析: 假设等边$\triangle ABC$已作出, 如图6, 过点A作$AD \perp l_3$于点D, 则等边$\triangle ADE$可作出, 因此可以把$\triangle ABE$看作由$\triangle ADC$旋转60°得到. $\angle BEA = 90^\circ$, 所以可以过点E作$BE \perp AE$交直线l_2于点B, 然后再确定点C. 因此得出以下作法.

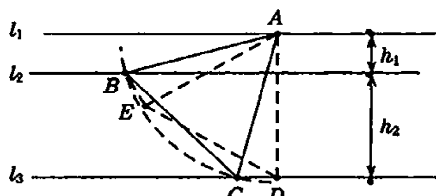


图6

作法: 在直线l_1上任取一点A作$AD \perp l_3$, 垂足为D, 以AD为一边作等边$\triangle ADE$, 过点E作$BE \perp AE$, 垂足为E, 交l_2于点B, 以点A为圆心, AB为半径画弧交l_3于点C, 连结AB、BC、AC. 则$\triangle ABC$即为所求的等边三角形.

较复杂的题目都是由若干道简单的题目组合而成. 在解题教学中, 首先要不断引导学生去总结一些基本图形, 吃透这些基本图形的本质, 然后让学生在以后的解题过程中遇到复杂的图形学会识别这些基本图形, 最后在熟练掌握这些基本图形的基础上学会构造出这些基本图形, 从而培养了学生思维的广阔性、深刻性和创新意识.

参考文献

[1] 汪宗兴. 由中考压轴题变式引发的系列思考[J]. 中学数学教学参考(中旬), 2011(9): 44-46.

(上接第7-5页)

围更简单. 问题2.3的探究解决, 对学生有很强的挑战性, 学生的兴趣和智力水平受到激发. 他们经历了独立思考后遇到困难、查阅资料后受到启发、相互讨论中逐渐清晰的过程, 学生的思维在问题解决过程中"翩翩起舞".

多问几个怎么办, 可以引导学生的思维更深刻. 问题2.2中当椭圆、双曲线和抛物线的离心率定义看似不一致时, 问问学生怎么办. 揭示知识内在的联系, 引导学生回顾、反思推导过程, 学生的认识可呈螺旋式上升, 有了新的发现, 体验到新知识是如何从已有知识逐步演变或发展而来, 就加深了学生对数学本质的认识. 波利亚曾指出: "好问题同某种蘑菇有些相像, 它们都成堆地生长, 找到一个以后, 你应当在四周找一找, 很可能四周就有好几个". 问题3就是一株很好的"蘑菇", 解决之后, 学生主动追问反射曲面为椭圆、双曲线时, 那反射光线应该有什么特点?作为老师只要多问学生怎么办, 就可以持续激发学生探究的兴趣, 结合图形, 从猜想结论到证明过程, 把学生的探究由课内引向课外, 让学生经历科学研究的一般过程.

参考文献

[1] 普通高中课程标准实验教科书(选修), 数学2-1 [M]. 江苏教育出版社, 2011.

[2] 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 人民教育出版社, 2003.

[3] 李长军, 徐毅. 解析几何学习中应注意的几个问题[J]. 数学通报, 2005(8): 33.

[4] 郇维中. 同一法证明圆锥曲线光学性质及应用举例[J]. 数学通报, 2011(6): 46-48.

[5] 陶维林. 解析几何教学要突出坐标法思想[J]. 数学通报, 2011(9): 36-37.

对一道高考题的探究、引申

256200　山东省邹平县教育局教研室　姜坤崇

题目　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 以该椭圆上的点和椭圆的左、右焦点 F_1、F_2 为顶点的三角形的周长为 $4(\sqrt{2}+1)$. 一等轴双曲线的顶点是该椭圆的焦点, 设 P 为该双曲线上异于顶点的任一点, 直线 PF_1 和 PF_2 与椭圆的交点分别为 A、B 和 C、D.

(Ⅰ) 求椭圆和双曲线的标准方程;

(Ⅱ) 设直线 PF_1 和 PF_2 的斜率分别为 k_1、k_2. 证明: $k_1k_2=1$;

(Ⅲ) 是否存在常数 λ, 使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

此题是2010年高考山东卷理科第21题, 这道题综合考查了椭圆与双曲线的基本概念、直线的斜率与方程、弦长公式等知识, 同时考查了数学探究的能力, 是一道内涵丰富、值得回味的好题. 为了更好地发挥本题的教学功能及思维价值, 下面我们重点针对结论 (Ⅲ) 展开一些探究, 并加以引申.

1. 一般性的结论

这道高考题, 对于 (Ⅰ), 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, 等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=4$; 对于(Ⅲ), 存在常数 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$, 使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立. 显然, 问题 (Ⅲ) 的答案也可以换一种方式叙述, 即存在常数 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$, 使得 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$ 为定值 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. 将此离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆一般化, 不难得到试题 (Ⅲ) 的一般性结论, 即下面的命题.

定理1′　给定椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, P 是以 E 的两个焦点 F_1、F_2 为顶点的等轴双曲线 $E_1: x^2-y^2=a^2-b^2$ 上异于 F_1、F_2 的任一点, 直线 PF_1 和 PF_2 与 E 的交点分别为 A、B 和 C、D, 则 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$ 为定值 $\frac{a^2+b^2}{2ab^2}$.

证明: 如图1, 设 $k_1=k_{PF_1}, k_2=k_{PF_2}$, $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 由于 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$ ($c=\sqrt{a^2-b^2}$, 以下同), 则直线 PF_1 和 PF_2 的方程分别为 $y=k_1(x+c)$、$y=k_2(x-c)$. 将直线 PF_1 的方程 $y=k_1(x+c)$ 代入 E 的方程整理为关于 x 的二次方程得 $(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^2ck_1^2x+a^2(c^2k_1^2-b^2)=0$.

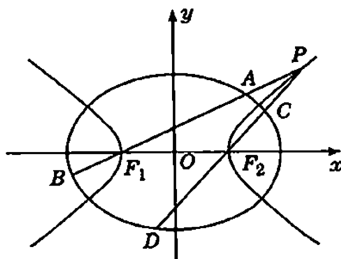


图1

由于 x_1、x_2 为上述方程的两个根, 故由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{2a^2ck_1^2}{a^2k_1^2+b^2}$,

$$x_1x_2=\frac{a^2(c^2k_1^2-b^2)}{a^2k_1^2+b^2}.$$

从而由弦长公式得

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(1+k_1^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}\\&=\sqrt{(1+k_1^2)\left[\frac{4a^4c^2k_1^4}{(a^2k_1^2+b^2)^2}-\frac{4a^2(c^2k_1^2-b^2)}{a^2k_1^2+b^2}\right]}\\&=\frac{2ab\sqrt{(1+k_1^2)[(a^2-c^2)k_1^2+b^2]}}{a^2k_1^2+b^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{2ab^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理，$|CD|=\dfrac{2ab^2(1+k_2^2)}{a^2k_2^2+b^2}.\cdots\cdots(2)$

由点P在等轴双曲线E_1上易得$k_1k_2=1$，于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}\\&=\frac{a^2k_1^2+b^2}{2ab^2(1+k_1^2)}+\frac{a^2k_2^2+b^2}{2ab^2(1+k_2^2)}\\&=\frac{a^2k_1^2+b^2}{2ab^2(1+k_1^2)}+\frac{a^2k_1^2k_2^2+b^2k_1^2}{2ab^2(k_1^2+k_1^2k_2^2)}\\&=\frac{a^2k_1^2+b^2}{2ab^2(1+k_1^2)}+\frac{a^2+b^2k_1^2}{2ab^2(1+k_1^2)}\\&=\frac{(a^2+b^2)(1+k_1^2)}{2ab^2(1+k_1^2)}=\frac{a^2+b^2}{2ab^2}.\end{aligned}$$

即$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值$\dfrac{a^2+b^2}{2ab^2}$.

当$a^2=8,b^2=4$，即得高考题的结论：$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，即存在常数$\lambda=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，使$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

2. 易曲线后的另一结论

由定理1′的证明过程我们发现，若$k_1k_2=-1$，则同样有$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值$\dfrac{a^2+b^2}{2ab^2}$的结论成立，而当点$P$在圆$x^2+y^2=a^2-b^2$上时有$k_1k_2=-1$，故将定理1′中的等轴双曲线$x^2-y^2=a^2-b^2$换成圆$x^2+y^2=a^2-b^2$则可得另一结论(具体证明从略)：

定理2′ 给定椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$为$E$的两个焦点，$P$是以$F_1F_2$为直径的圆$E_1:x^2+y^2=a^2-b^2$上异于$F_1$、$F_2$的任一点，直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$，则$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值$\dfrac{a^2+b^2}{2ab^2}$.

3. 逆向化的结论

下面我们考虑定理1′的逆向化问题，即：给定椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，两个焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$是不在$x$轴上的一点，直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$，若$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值，则点$P$的轨迹如何？探究如下：

设$P(x,y)\,(y\neq0),k_1=k_{PF_1},k_2=k_{PF_2}$，由于$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，则直线$PF_1$和$PF_2$的方程分别为$y=k_1(x+c)$、$y=k_2(x-c)$. 同定理1′的证明得到(1)、(2)两式，于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}\\&=\frac{a^2k_1^2+b^2}{2ab^2(1+k_1^2)}+\frac{a^2k_2^2+b^2}{2ab^2(1+k_2^2)}\\&=\frac{(a^2+b^2)(k_1^2+k_2^2)+2a^2k_1^2k_2^2+2b^2}{2ab^2(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2+1)}.\end{aligned}$$

令$\dfrac{(a^2+b^2)(k_1^2+k_2^2)+2a^2k_1^2k_2^2+2b^2}{k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2+1}=M$ (M为常数)，则

$(a^2+b^2-M)(k_1^2+k_2^2)+(2a^2-M)k_1^2k_2^2+2b^2-M=0.\cdots\cdots(3)$

(i) 如果$k_1^2+k_2^2$不为常数，则(3)式恒成立的充要条件为

$$\begin{cases}a^2+b^2=M,\cdots\cdots(4)\\(2a^2-M)k_1^2k_2^2+2b^2-M=0.\cdots(5)\end{cases}$$

将(4)式代入(5)式得$(a^2-b^2)(k_1^2k_2^2-1)=0$，因为$a^2-b^2\neq0$，所以$k_1^2k_2^2=1$.

(ii) 如果$k_1^2+k_2^2=N$ (N为常数，$N>0$)，则(3)式恒成立的充要条件为

$$\begin{cases}2a^2-M=0,\cdots\cdots(6)\\(a^2+b^2-M)N+2b^2-M=0.\cdots(7)\end{cases}$$

将(6)式代入(7)式得$(a^2-b^2)(N+2)=0$，由于$N>0$，显然此式不成立. 这说明若$k_1^2+k_2^2=N$ (N为常数，$N>0$)，则(3)式不恒成立.

综合(i)、(ii)，(3)式恒成立的充要条件为$k_1k_2=-1$或$k_1k_2=1$，此时$M=a^2+b^2$，从而$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值$\dfrac{a^2+b^2}{2ab^2}$.

当$k_1k_2=1$时，即$\dfrac{y}{x+c}\cdot\dfrac{y}{x-c}=1$，可得点$P$的轨迹为除去顶点的等轴双曲线$x^2-y^2=a^2-b^2$；当$k_1k_2=-1$时，即$\dfrac{y}{x+c}\cdot\dfrac{y}{x-c}=-1$，可得点$P$的轨迹为除去$x$轴上两点的圆$x^2+y^2=a^2-b^2$.

由上面的探究，我们得到下面的结论(具体证明不再给出)：

定理1　给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, F_1、F_2为E的两个焦点, P是平面上一点(P不在x轴上), 直线PF_1和PF_2与E的交点分别为A、B和C、D, 则$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$为定值$\frac{a^2+b^2}{2ab^2}$的充要条件为点$P$在等轴双曲线$E_1: x^2-y^2=a^2-b^2$或圆$E_2: x^2+y^2=a^2-b^2$上.

4. 引申

上面探讨了椭圆中满足一定条件的$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$为定值的充要条件, 作为这个问题的讨论可暂告一段落, 下面我们考虑的问题是, 既然问题中$|AB|$, $|CD|$的倒数和$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$可为定值, 那么$|AB|$, $|CD|$的积$|AB|\cdot|CD|$与和$|AB|+|CD|$ 等可否为定值呢? 其充要条件又各是什么? 下面进行新一轮的探究.

先探究$|AB|\cdot|CD|$为定值的充要条件: 设同定理1′的证明, 则可得(1)、(2)式, 于是

$$|AB|\cdot|CD|=\frac{4a^2b^4(1+k_1^2)(1+k_2^2)}{(a^2k_1^2+b^2)(a^2k_2^2+b^2)}$$
$$=\frac{4a^2b^4(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2+1)}{a^2b^2(k_1^2+k_2^2)+a^4k_1^2k_2^2+b^4}.$$

令$\frac{k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2+1}{a^2b^2(k_1^2+k_2^2)+a^4k_1^2k_2^2+b^4}=M$ (M为常数), 则

$$(a^2b^2M-1)(k_1^2+k_2^2)+(a^4M-1)k_1^2k_2^2+b^4M-1=0. \quad (8)$$

(i) 如果$k_1^2+k_2^2$不为定常数, 则(8)式恒成立的充要条件为

$$\begin{cases}a^2b^2M-1=0, & (9)\\ (a^4M-1)k_1^2k_2^2+b^4M-1=0. & (10)\end{cases}$$

将(9)式代入(10)式得$(a^2-b^2)(a^2k_1^2k_2^2-b^2)=0$, 因为$a^2-b^2\neq0$, 所以$k_1^2k_2^2=\frac{b^2}{a^2}$.

(ii) 如果$k_1^2+k_2^2=N$ (N为常数, $N>0$), 则(8)式恒成立的充要条件为

$$\begin{cases}a^4M-1=0, & (11)\\ (a^2b^2M-1)N+b^4M-1=0. & (12)\end{cases}$$

将(11)式代入(12)式得$(a^2-b^2)[(N+1)a^2+b^2)=0$, 显然此式不成立. 这说明若$k_1^2+k_2^2=N$ (N为常数, $N>0$), 则(8)式不恒成立.

综合(i)、(ii), (8)式恒成立的充要条件为$k_1k_2=\frac{b}{a}$或$k_1k_2=-\frac{b}{a}$, 此时$M=\frac{1}{a^2b^2}$, 从而$|AB|\cdot|CD|$为定值$4b^2$.

当$k_1k_2=\frac{b}{a}$时, 即$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=\frac{b}{a}$, 可得点$P$的轨迹为除去顶点的双曲线$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$; 当$k_1k_2=-\frac{b}{a}$时, 即$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-\frac{b}{a}$, 可得点$P$的轨迹为除去$x$轴上两顶点的椭圆$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$. 由此可得如下结论(具体证明不再给出):

定理2　给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, F_1、F_2为E的两个焦点, P是平面上一点(P不在x轴上), 直线PF_1和PF_2与E的交点分别为A、B和C、D, 则$|AB|\cdot|CD|$为定值$4b^2$的充要条件为点P在双曲线$E_1:\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$或椭圆$E_2:\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上.

由定理2, 可得如下两个结论:

结论1　给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, P是以E的两个焦点F_1、F_2为顶点且离心率为$\sqrt{\frac{a+b}{a}}$的双曲线$E_1:\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上异于$F_1$、$F_2$的任一点, 直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$, 则$|AB|\cdot|CD|$为定值$4b^2$.

结论2　给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, P是以E的两个焦点F_1、F_2为顶点且离心率为$\sqrt{\frac{a-b}{a}}$的椭圆$E_1:\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{bc^2}{a}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上异于$F_1$、$F_2$的任一点, 直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$, 则$|AB|\cdot|CD|$为定值$4b^2$.

下面只给出结论1的证明:

设同定理1′的证明, 则可得(1)、(2)式.

由P在双曲线E_1上易得$k_1k_2=\frac{b}{a}$, 于是由(1)、(2)式可得

$$\begin{aligned}|AB|\cdot|CD|&=\frac{4a^2b^4(1+k_1^2)(1+k_2^2)}{(a^2k_1^2+b^2)(a^2k_2^2+b^2)}\\&=\frac{4a^2b^4(1+k_1^2)(k_1^2+k_1^2k_2^2)}{(a^2k_1^2+b^2)(a^2k_1^2k_2^2+b^2k_1^2)}\\&=\frac{4a^2b^4(1+k_1^2)\left(k_1^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}{(a^2k_1^2+b^2)(b^2+b^2k_1^2)}\\&=\frac{4b^2(1+k_1^2)(a^2k_1^2+b^2)}{(a^2k_1^2+b^2)(1+k_1^2)}\\&=4b^2(\text{定值}).\end{aligned}$$

仿定理2的探究方法, 类似地可得, $|AB|+|CD|$为定值$\frac{2(a^2+b^2)}{a}$的充要条件为$k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$或$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$. 由此可得结论(具体证明从略):

定理3 给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, F_1、F_2为E的两个焦点, P是平面上一点(P不在x轴上), 直线PF_1和PF_2与椭圆E的交点分别为A、B和C、D, 则$|AB|+|CD|$为定值$\frac{2(a^2+b^2)}{a}$的充要条件为点P在双曲线$E_1:\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=1$或椭圆$E_2:\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上.

由定理3, 可得如下两个结论:

结论3 给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, P是以E的两焦点F_1、F_2为长轴的两端点且与E同离心率的椭圆E_1 : $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上异于$F_1$、$F_2$的任一点, 直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$, 则$|AB|+|CD|$为定值$\frac{2(a^2+b^2)}{a}$.

结论4 给定椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, P是以E的两焦点F_1、F_2为顶点且离心率为$\sqrt{2-e^2}$(e为E的离心率)的双曲线E_1 : $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=1$(其中$c^2=a^2-b^2$)上异于$F_1$、$F_2$的任一点, 直线$PF_1$和$PF_2$与$E$的交点分别为$A$、$B$和$C$、$D$, 则$|AB|+|CD|$为定值$\frac{2(a^2+b^2)}{a}$.

下面只给出结论3的证明:

设同定理1′的证明, 则可得(1)、(2)式.

由P在椭圆E_1上易得$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$, 于是由(1)、(2)式可得

$$\begin{aligned}&|AB|+|CD|\\&=\frac{2ab^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}+\frac{2ab^2(1+k_2^2)}{a^2k_2^2+b^2}\\&=\frac{2ab^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}+\frac{2ab^2\left(k_1^2+\frac{b^4}{a^4}\right)}{\frac{b^4}{a^2}+b^2k_1^2}\\&=\frac{2ab^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}+\frac{2(a^4k_1^2+b^4)}{a(a^2k_1^2+b^2)}\\&=\frac{2(a^2+b^2)(a^2k_1^2+b^2)}{a(a^2k_1^2+b^2)}\\&=\frac{2(a^2+b^2)}{a}(\text{定值}).\end{aligned}$$

以上我们展现了对一道高考题探究、创新(这里主要指引申的几个结论)的过程, 目的是要告诉我们的学生, 数学的创新与发现并不神秘, 只要我们遵循数学研究的基本规律, 从已有的具体问题出发, 将特殊问题一般化(推广), 或一般问题特殊化, 或将已有问题作横纵向的类比(引申), 或将问题逆向思考, 总会发现、提出新的问题, 并通过试验、比较、归纳、假设等数学思维方法和手段加以解决(证明或否定). 只要你做个有心人并努力去尝试、探究, 新的发现就会在你的头脑中孕育产生, 创新能力就会不断地得到培养与提高.

参考文献

[1] 姜坤崇. 一道高考题的一般化及引申[J]. 河北理科教学研究, 2011(3): 11-13.

[2] 姜坤崇. 椭圆中利用1的代换解题几例[J]. 高中数学教与学, 2011(11): 15-17.

[3] 姜坤崇. 相似椭圆的性质再探[J]. 数学通讯, 2011(9)(下半月): 41-43.

在探究中发现，发现中探究

211700 江苏省盱眙中学 周志国

在解析几何中，过定点的直线与坐标轴围成的直角三角形倍受命题者的青睐，与之相关的问题有长度之和(或积)、面积的最值等.文[1]、[2]分别总结了与之相关的问题，给出了求解方法并推广，得到了一般性的结论.笔者对此再探究，发现与周长有关的一个问题，寻求其解法后意外发现了一类问题，并进行一般性的推广.

问题　过点$P(2,1)$的直线l与x、y轴的正半轴分别交于A、B两点，求$\triangle ABO$周长c的最小值，并求出此时对应的直线l的方程.

1. 解法探究

解法一：因为直线l与x、y轴的正半轴分别交于A、B两点，故设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,(a>0,b>0)$，且满足$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.

$\therefore\ c=|OA|+|OB|+|AB|=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$.……………………………(*)

由条件$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$得$a=\frac{2b}{b-1}$,

令$b-1=2\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore\ c=|OA|+|OB|+|AB|=\frac{2b}{b-1}+b+\sqrt{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^2+b^2}$$

$$=3+\frac{1}{\tan\theta}+2\tan\theta+\frac{1}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta},$$

设$t=\tan\frac{\theta}{2}\,(0<x<1)$，由万能公式可得

$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$,　$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$.

代入上式并整理得$c=6+\frac{1-t}{t}+\frac{4t}{1-t}$.

由均值不等式得

$$c\geq 6+2\sqrt{\frac{1-t}{t}\cdot\frac{4t}{1-t}}=6+4=10,$$

当且仅当$\frac{1-t}{t}=\frac{4t}{1-t}$时取等号，即$t=\frac{1}{3}$时，$c$的最小值为10，此时直线$l$斜率为$k=-\tan\theta=-\frac{3}{4}$，方程为$y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$，即$3x+4y-10=0$.

反思：本解法中的(*)式容易得到，但也会因为得到这一步后无法直接联系条件和结论而选择放弃该解法.要想能进展下去，需对式子特征敏感，结构分析，采用换元、再化简，达到求最值的目的．但这样明显难度较大，不太容易攻破.

2. 解法再探究(几何法)

以上的解法将问题转化成纯粹的代数问题来处理.而在解析几何中遇到与线段和有关的最值问题时，常借助于图形，通过对称、二次曲线的定义等将周长“拉直”，利用几何特征直接求解其最值．为此，笔者尝试将$\triangle AOB$周长分解，利用图形特征，实现问题圆满的解决，其解答如下：

解法二：(如图1)作$\triangle AOB$的旁切圆，与两坐标轴相切于点C、D，则当点P为切点时$\triangle AOB$周长最小.设$\triangle AOB$周长为L，圆的半径为r，圆心为$M(r,r)$，则

$$\begin{aligned}L&=OA+OB+AB\\&=OA+OB+(AP+BP)\\&=(OA+AP)+(OB+BP)\\&=(OA+AD)+(OB+BC)\\&=OD+OC=r+r=2r.\end{aligned}$$

由$MP=r$得$\sqrt{(r-2)^2+(r-1)^2}=r$，解得$r=1$(舍去)或者$r=5$，此时$L=2r=10$，$M(5,5)$，MP的斜率为$\frac{4}{3}$，所以直线l斜率

为$k=-\frac{3}{4}$, 方程为$y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$, 即$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$.

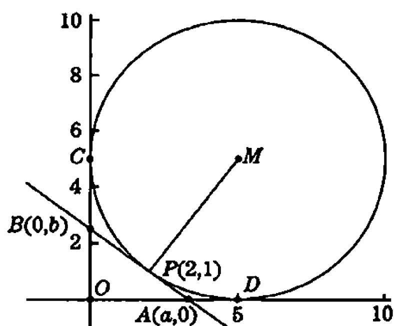


图1

反思: 本解法充分利用图形的特征, 将$\triangle AOB$的周长进行分解, 把斜边AB分解成AP与BP, 分别傍在直角边OA与OB上, 相当于"拉直"了再计算. 因而在处理解析几何中与线段之和有关的最值问题时, 我们要充分挖掘其几何特征, 实现以形助数, 简化计算.

3. 问题推广

过点$P(m,n)$的直线l分别交x轴、y轴正半轴于A、B两点, 则$\triangle AOB$周长的最小值为$2(m+n+\sqrt{2mn})$.

证明: 设直线l与x轴的锐角为θ (如图2), 则

$$\begin{cases} a=m+n\cot\theta, \\ b=n+m\tan\theta, \end{cases} \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

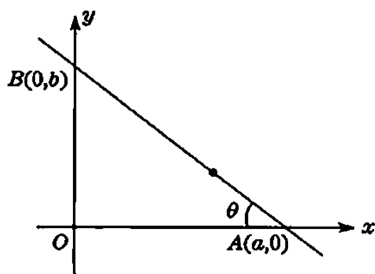


图2

周长$c=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

$=m+n+n\cot\theta+m\tan\theta+\sqrt{(m+n\cot\theta)^2+(n+m\tan\theta)^2}$

$=m+n+n\cot\theta+m\tan\theta+\frac{m}{\cos\theta}+\frac{n}{\sin\theta}$

令$t=\tan\frac{\theta}{2}$, 则$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$. 于是

$$\begin{aligned} c&=m+n+\frac{2mt}{1-t^2}+\frac{n(1-t^2)}{2t} \\ &\quad+\frac{m(1+t^2)}{1-t^2}+\frac{n(1+t^2)}{2t} \\ &=m+n+\frac{mt^2-nt+mt+n}{t(1-t)} \\ &=m+n+m+n+\frac{n(1-t)}{t}+\frac{2mt}{1-t} \\ &\geqslant 2(m+n)+2\sqrt{2mn}. \end{aligned}$$

当且仅当$\frac{n(1-t)}{t}=\frac{2mt}{1-t}$, 即$t=\frac{-n+\sqrt{2mn}}{2m-n}$时等号成立.

此时直线l的斜率

$$\begin{aligned} k&=-\tan\theta=\frac{-2t}{1-t^2} \\ &=\frac{2(n-\sqrt{2mn})(2m-n)}{(2m-2n+\sqrt{2mn})(2m-\sqrt{2mn})}. \end{aligned}$$

直线l的方程为$y=k(x-m)+n$.

从上述探究过程中认识到, 在处理一个新颖的数学问题时, 要善于从不同的角度认识问题, 善于将不熟悉的问题通过化归转化成熟悉的问题, 或从方法上联系类比, 优化我们的解题过程, 不仅解决了一道试题, 更重要的是提升了我们数学思维能力. 在处理过程中, 更要注重反思, 不放弃解题过程中的任一环节, 关注每一个细节, 有时可谓是小方法却有大发现, 感受着探究的乐趣, 这正是数学的魅力所在.

参考文献

[1] 刘鸿春. 直线方程中一组有趣的最值问题[J]. 数学通讯, 2011(1, 2): 46.

[2] 叶玲. 一道试题的解法探究[J]. 数学通讯, 2011(4): 26-27.

不识庐山真面目 只缘身在此山中

——一道好题的本质探究

724300 陕西省略阳县天津高级中学 陈 波

一道好的数学题并不在于有多么难, 而是能够充分考查解题者对数学问题本质的理解, 更应该是可以成为数学探究活动的好题材, 本文拟介绍这样一道好题.

1. 原题

已知圆 $C_1: x^2+y^2=17$ 和圆 $C_2: (x-2)^2+(y-2)^2=5$ 的一个交点是 $P(1,4)$, 求过点 P 的直线 l, 使 l 被两个圆截得的弦长相等.

2. 原题解答

2.1 用代数方法求解

解法1: 易知直线 l 的斜率 k 存在, 因此设直线 l 的方程为 $y-4=k(x-1)$, 即 $kx-y+4-k=0$. 设直线 l 与圆 C_1 的交点为 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$, 直线 l 与圆 C_2 的交点为 $P_3(x_3,y_3)$、$P_4(x_4,y_4)$.

由 $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ kx-y+4-k=0 \end{cases}$ 得

$$(k^2+1)x^2+(8k-2k^2)x+k^2-8k-1=0,$$

于是有 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2-8k}{k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{k^2-8k-1}{k^2+1}$.

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{64k^2+32k+4}{k^2+1}}.$$

由 $\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2=5, \\ kx-y+4-k=0 \end{cases}$ 得

$$(k^2+1)x^2-(2k^2-4k+4)x+k^2-4k+3=0,$$

于是有 $x_3+x_4=\dfrac{2k^2-4k+4}{k^2+1}$, $x_3x_4=\dfrac{k^2-4k+3}{k^2+1}$.

所以

$$|P_3P_4|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{\frac{16k^2-16k+4}{k^2+1}}.$$

由 $|P_1P_2|=|P_3P_4|$ 得

$$\sqrt{\frac{64k^2+32k+4}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{16k^2-16k+4}{k^2+1}},$$

从而 $k(k+1)(k-3)=0$, 其中 $k=3$ 为增解, 舍去, 所以 $k=0$ 或 $k=-1$.

因此所求直线 l 的方程为 $y=4$ 或 $x+y-5=0$.

2.2 用几何方法求解

解法2: 如图1所示, 圆 C_1 和圆 C_2 相交于点 P, $C_1A\perp l$, $C_2B\perp l$. 要使直线 l 被两圆截得的弦长相等, 则需 $|PA|=|PB|$, 从而有 $|PC_1|^2-|AC_1|^2=|PC_2|^2-|BC_2|^2$, 即 $|AC_1|^2-|BC_2|^2=|PC_1|^2-|PC_2|^2=12$.

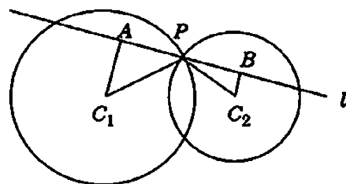


图1

易知直线 l 的斜率 k 存在, 因此设直线 l 的方程为 $y-4=k(x-1)$, 即 $kx-y+4-k=0$.

于是由点线距离公式得 $|AC_1|=\dfrac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$, $|BC_2|=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$, 从而 $|AC_1|^2-|BC_2|^2=\dfrac{(k-4)^2}{k^2+1}-\dfrac{(k+2)^2}{k^2+1}=12$.

所以 $k=0$ 或 $k=-1$.

因此所求直线 l 的方程为 $y=4$ 或 $x+y-5=0$.

如果因为这道试题的顺利解答而至此结束, 那么就会留有遗憾. 数学解题过程绝不是单纯地为解题而解题, 解数学题的过程实质上就是揭示问题本质的过程. 那么, 本题又有什么"本质"深藏其中?

3. 探其庐山真面目

3.1 对原题解法反思

笔者作了圆 C_1: $x^2+y^2=17$ 和圆 C_2: $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 以及直线 $x+y-5=0$ 和 $y=4$, 如图2所示.

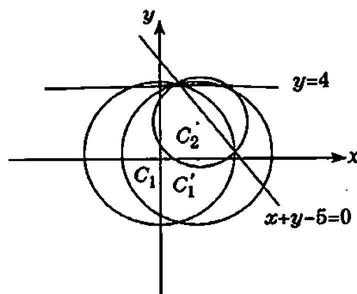


图2

从图2发现: 由于圆 C_1 和圆 C_2 是两相交的圆, 所以用圆 C_1 的方程减去圆 C_2 的方程便得到两圆公共弦所在直线方程 $x+y-5=0$, 即为符合原题要求的一条直线. 由图形进一步分析, 不难发现只要对圆 C_1 进行一个简单的平移便得到圆 C_1': $(x-2)^2+y^2=17$. 事实上, 用圆 C_1' 的方程减去圆 C_2 的方程便得到这两圆公共弦所在直线方程 $y=4$, 也即为符合原题要求的另一条直线. 因此, 如果能确定圆 C_1' 的方程, 可得原题中所需的另一条直线方程. 随之而来的就有:

问题1: 圆 C_1' 能否确定?

3.2 提出变式问题

对于问题1, 我们暂且放下. 由于原题目中的两圆是相交的, 在此笔者特给出了下面的一道变式题目.

变式题目:

已知圆 C_1: $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$ 和圆 C_2: $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=5$ 以及一点 $P(0,-\sqrt{2})$, 求过点 P 的直线 l, 使 l 被两个圆截得的弦长相等. 仿原题解法, 容易求得仅有一条符合题意的直线 l: $y=x-\sqrt{2}$.

笔者将本题所求解结果通过作图(如图3)进一步探究. 因这道变式题目中的两圆相离, 同时受图2的启发产生了第二个问题.

问题2: 能否通过平移使两圆相交, 从而转换为求两圆公共弦所在直线方程?

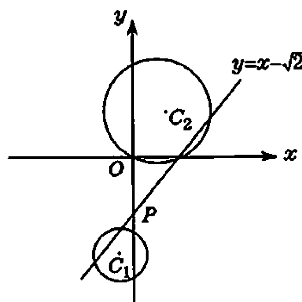


图3

带着问题2, 笔者进行了下面的思考探究.

3.3 问题2探究

已知圆 C_1: $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ 和圆 C_2: $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ 以及一定点 $P(x_0,y_0)$, 求过点 P 的直线 l, 使 l 被两个圆截得的弦长相等.

如图4所示, 将圆 C_1: $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ 按向量 $\overrightarrow{C_1C_1'}=(m,n)$ 平移得圆 C_1': $(x-m-a_1)^2+(y-n-b_1)^2=r_1^2$, 将圆 C_2: $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ 按向量 $\overrightarrow{C_2C_2'}=(-m,-n)$ 平移得圆 C_2': $(x+m-a_2)^2+(y+n-b_2)^2=r_2^2$.

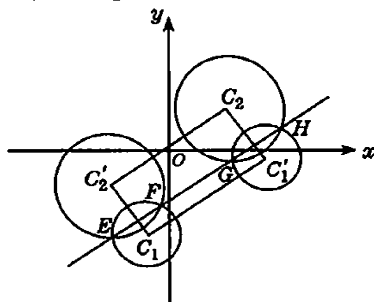


图4

用圆 C_1' 的方程减去圆 C_2 的方程, 则得直线 GH:

$$2(m-a_2+a_1)x+2(n-b_2+b_1)y-(a_1+m)^2-(b_1+n)^2+a_2^2+b_2^2+r_1^2-r_2^2=0.$$

用圆 C_2' 的方程减去圆 C_1 的方程, 则得直线 EF:

$$2(m-a_2+a_1)x+2(n-b_2+b_1)y+(a_2-m)^2+(b_2-n)^2-a_1^2-b_1^2+r_1^2-r_2^2=0.$$

从上述过程可以看出下面几点:

(1) 因为向量$\overrightarrow{C_1C_1'}=-\overrightarrow{C_2C_2'}$, 两圆的公共弦垂直于连心线, 所以四边形$C_1C_1'C_2C_2'$是矩形.

(2) 又由平移的性质可知, 直线GH和直线EF重合, 记这条直线为l. 所以

$$-(a_1+m)^2-(b_1+n)^2+a_2^2+b_2^2+r_1^2-r_2^2=(a_2-m)^2+(b_2-n)^2-a_1^2-b_1^2+r_1^2-r_2^2,$$

即$m^2+n^2+(a_1-a_2)m+(b_1-b_2)n=0$. ⋯⋯(※)

(3) 将点$P(x_0,y_0)$代入直线l的方程, 结合(※)式便可求出m,n的值, 从而得直线l的方程. 最后检验直线l如果与圆C_1、圆C_2相交, 则为所求直线. 因为由(1)、(2)、(3)可知直线l平行于矩形$C_1C_1'C_2C_2'$的边C_1C_1', 所以圆C_1和圆C_1'的圆心到直线l的距离相等, 又由圆C_1和圆C_1'的半径相等, 于是$GH=EF$, 这就说明经过定点$P(x_0,y_0)$的直线l确实被两圆C_1、C_2截得弦长相等.

到此, 问题2得到了解决, 同时对于原题目与变式题目也有了新的解法. 还需说明的是对于这类问题至多有两解.

3.4 *新解法*

3.4.1 原题目新解法

设圆C_1: $x^2+y^2=17$按向量$\overrightarrow{C_1C_1'}=(m,n)$平移得圆$C_1'$: $(x-m)^2+(y-n)^2=17$. 圆C_2: $(x-2)^2+(y-2)^2=5$按向量$\overrightarrow{C_2C_2'}=(-m,-n)$平移得圆

C_2': $(x+m-2)^2+(y+n-2)^2=5$.

用圆C_1'的方程减去圆C_2的方程则得直线l_1:

$$(4-2m)x+(4-2n)y+m^2+n^2-20=0.$$

用圆C_2'的方程减去圆C_1的方程则得直线l_2:

$$(4-2m)x+(4-2n)y-m^2-n^2+4m+4n-20=0.$$

由$m^2+n^2-20=-m^2-n^2+4m+4n-20$得$m^2+n^2-2m-2n=0$.

将点$P(1,4)$代入直线l_1得$m^2+n^2-2m-8n=0$.

从而解得$m=0,n=0$或$m=2,n=0$.

于是得直线$x+y-5=0$或$y=4$.

由于$x+y-5=0$和$y=4$都与原题中两圆相交, 所以这两直线即为所求.

3.4.2 变式题目新解法

设圆C_1: $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$, 按向量$\overrightarrow{C_1C_1'}=(m,n)$平移得

圆C_1': $\left(x-m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-n+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$.

圆C_2: $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=5$按向量$\overrightarrow{C_2C_2'}=(-m,-n)$平移得

圆C_2': $\left(x+m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+n-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=5$.

用圆C_1'的方程减去圆C_2的方程则得直线l_1:

$$(2\sqrt{2}-2m)x+(8\sqrt{2}-2n)y+m^2+n^2-\sqrt{2}m-5\sqrt{2}n+11=0.$$

用圆C_2'的方程减去圆C_1的方程则得直线l_2:

$$(2\sqrt{2}-2m)x+(8\sqrt{2}-2n)y-m^2-n^2+\sqrt{2}m+3\sqrt{2}n+11=0.$$

由$m^2+n^2-\sqrt{2}m-5\sqrt{2}n+11=-m^2-n^2+\sqrt{2}m+3\sqrt{2}n+11$得

$$m^2+n^2-\sqrt{2}m-4\sqrt{2}n=0.$$

将点$P(0,-\sqrt{2})$代入直线l_1得$m^2+n^2-\sqrt{2}m-3\sqrt{2}n-5=0$, 从而解得$m=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $n=\frac{5\sqrt{2}}{2}$或$m=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $n=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

于是得直线$x-y-\sqrt{2}=0$或$5x+3y+3\sqrt{2}=0$.

由于$x-y-\sqrt{2}=0$和题中两圆都相交, 所以这条直线即为所求.

由于$5x+3y+3\sqrt{2}=0$和题中两圆都相离, 所以这条直线舍去.

4. 从几何作图的角度看问题

如图4所示, 上述解法实际上需要将题目中的两个圆都进行平移. 其实, 只需将其中一个圆进行平移也是可以的.

对于给定的两圆C_1、C_2及一定点P, 能否过点P作出一条直线l被两圆截得弦长相等?

如图5, 若圆C_1'看作是由圆C_1沿着直线l平移得到, 则有下面几点:

一个抛物线问题的变式

350007 福建省福州市福建师范大学附属中学 沈春林

问题变式包括问题推广、逆向操作条件与结论、对条件与结论进行遮盖和隐蔽等, 变式后的问题与原问题有着或明或暗的联系. 命题者可以通过变式构造出精巧、美妙的试题, 解题者可以通过这些题目培养探究精神和发现能力, 认清问题本质, 积累解题经验, 并开阔自己的视野. 本文将展示如何从抛物线中的一个问题出发, 经过问题推广、逆向操作、遮盖和隐蔽等方法, 分别得到2009年全国高考辽宁卷理科第20题及2011年全国高中数学联赛一试第11题.

一、一个传统的抛物线问题

问题1 如图1, 抛物线$y^2=2px(p>0)$, O为坐标原点, $P(m,n)$是抛物线上的一定点, PA、PB是抛物线上的两动弦, 其所在直线与x轴分别交于点M、N, 且$\angle PMN=\angle PNM$, 证明: AB所在直线的斜率为定值.

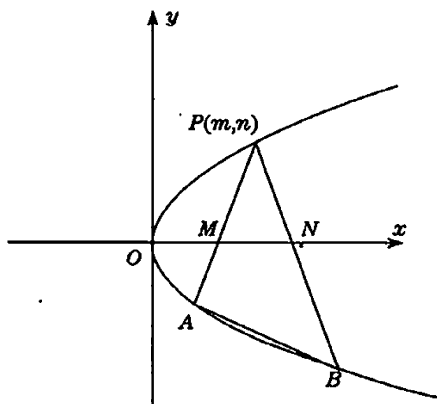


图1

分析: 设AB所在直线方程为$y=kx+b$(显然$k\neq 0$), 要证明斜率为定值, 只要将问题的几何条件$\angle PMN=\angle PNM$转化为$k_{PA}+k_{PB}=0$, 联立AB所在直线方程和抛物线方程求出k即可. 也可以把点A、B坐标设定后根据$k_{PA}+k_{PB}=0$直接计算k_{AB}.

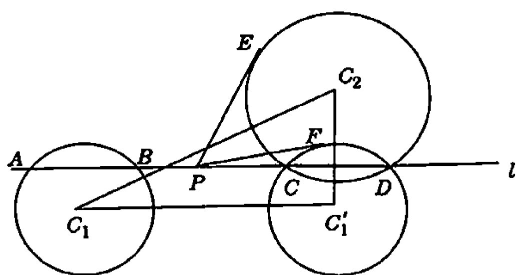


图5

(1) 过点P分别作圆C_1'和圆C_2的切线PF、PE. 由于$PF^2=PC\cdot PD$, $PE^2=PC\cdot PD$, 所以$PF=PE$. 从而可以求得$PC_1'=\sqrt{r_1^2+PE^2}$(其中r_1是圆C_1的半径).

(2) 若三角形$C_1C_1'C_2$是直角三角形, 则C_1、C_1'、C_2三点共圆, 且在以C_1C_2为直径的圆上.

(3) 结合(1)、(2)可知, 以点P为圆心, 以$\sqrt{r_1^2+PE^2}$为半径的圆和以C_1C_2为直径的圆的一个交点即为点C_1', 这样圆C_1'就可以确定. 若圆C_1'和圆C_2交于直线CD, 则CD为所求直线l. 并且点P一定在直线CD上, 否则$PF=PE$不成立. 由于$C_1C_1'/\!/CD$, 所以点C_1、C_1'分别到弦AB、CD的距离相等, 而圆C_1和圆C_1'的半径相同, 所以$AB=CD$.

同样地, 对于这类问题至多有两解.

到此, 问题1也就得到了解决.

5. 结束语

对于数学中好的题目, 解题后不能只是简单地进行回顾和检验, 应该注重问题本质的思考、探究, 这样才能使我们的数学思维进入更高的层次, 才能使我们在数学解题教学的过程中不断洞察数学问题的本质特征从而创新解题方法, 培养创新思维.

证明: 设 AB 所在直线方程为 $y=kx+b$ (显然 $k\neq 0$ 且存在), $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 联立直线方程和抛物线方程得

$$\begin{cases} y=kx+b, \\ y^2=2px, \end{cases}$$ 化简得

$$y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2pb}{k}=0. \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$\because \angle PMN=\angle PNM$, $\therefore k_{PA}+k_{PB}=0$, 即 $\dfrac{y_1-n}{x_1-m}+\dfrac{y_2-n}{x_2-m}=0$. 把 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$, $x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$, $m=\dfrac{n^2}{2p}$ 代入得 $\dfrac{y_1-n}{\frac{y_1^2-n^2}{2p}}+\dfrac{y_2-n}{\frac{y_2^2-n^2}{2p}}=0$,

即 $y_1+y_2+2n=0. \cdots\cdots\cdots\cdots ②$

由①得 $y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}$, 代入②得 $k=-\dfrac{p}{n}$, 因此 AB 所在直线的斜率为定值.

另证: 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(m,n)$, $\because \angle PMN=\angle PNM$, $\therefore k_{PA}+k_{PB}=0$, 即 $\dfrac{y_1-n}{x_1-m}+\dfrac{y_2-n}{x_2-m}=0$. 把 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$, $x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$, $m=\dfrac{n^2}{2p}$ 代入得 $\dfrac{y_1-n}{\frac{y_1^2-n^2}{2p}}+\dfrac{y_2-n}{\frac{y_2^2-n^2}{2p}}=0$, 即 $y_1+y_2+2n=0$. $\therefore k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2-y_2^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{2p}{-2n}=-\dfrac{p}{n}$.

评注: 由 $\angle PMN=\angle PNM$ 易得到关于 y_1、y_2 的表达式 $y_1+y_2+2n=0$, 因此联立方程组将其化为关于 y 的方程. 斜率 $k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$ 具有简洁的表达式是另证可以进行的关键所在.

二、问题推广

问题2 (2009年全国高考辽宁卷理科第20题) 如图2, 已知椭圆 C 过点 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 两个焦点为 $(-1,0)$、$(1,0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) E、F 是椭圆 C 上的两个动点, 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数, 证明直线 EF 的斜率为定值, 并求出这个定值.

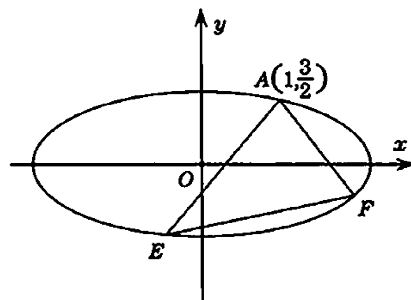


图2

分析: 从抛物线到椭圆, 斜率的表达式变得复杂, 必须重新寻觅新的计算方法.

解: (1) 由题意知 $c=1$, 可设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{1+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 由点 A 在椭圆上可得 $\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$, 解得 $b^2=3$ 或 $b^2=-\dfrac{3}{4}$ (舍去), 所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 设直线 AE 的方程为 $y=k(x-1)+\dfrac{3}{2}$, 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得

$$(3+4k^2)x^2+4k(3-2k)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0.$$

设 $E(x_E,y_E)$、$F(x_F,y_F)$. 因为点 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆上, 所以

$$x_E=\frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{3+4k^2},$$

$$y_E=kx_E+\frac{3}{2}-k.$$

又由直线 AF 的斜率与 AE 的斜率互为相反数, 在上式中以 $-k$ 代替 k, 可得

$$x_F=\frac{4\left(\frac{3}{2}+k\right)^2-12}{3+4k^2},$$

$$y_F=-kx_F+\frac{3}{2}+k.$$

所以直线 EF 的斜率 $k_{EF}=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}=\dfrac{1}{2}$, 即直线 EF 的斜率为定值, 其值为 $\dfrac{1}{2}$.

评注: 命题者把抛物线中的结论推广到椭圆, 并赋以具体数值, 从而构造出一道难度适宜、计算量适中并且很好地考察解析几何基本思想的好题. 巧用根与系数的关系得出

x_E、y_E, 然后以 $-k$ 代替 k 直接得出 x_F、y_F, 这是本题在计算上的特色和创新.

三、逆向变换和隐藏结论

问题3 (2011年全国高中数学联赛第11题) 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点 (如图3所示), 且 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方.

(1) 证明: $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上;

(2) 若 $\angle APB=60°$, 求 $\triangle PAB$ 的面积.

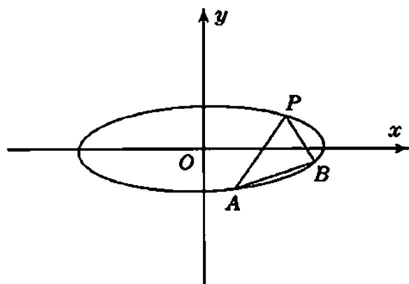


图3

分析: 结合问题2, 猜想其逆命题成立, 即由 $k_{AB}=\frac{1}{3}$ 及 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为定点可得 $k_{PA}+k_{PB}=0$, 从而 PA、PB 所在直线与 x 轴构成等腰三角形, $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上就水到渠成.

解: (1) 设直线 $l:y=\frac{1}{3}x+m$, $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 将 $y=\frac{1}{3}x+m$ 代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 中, 化简、整理得 $2x^2+6mx+9m^2-36=0$, 故 $x_1+x_2=-3m$, $x_1\cdot x_2=\frac{9m^2-36}{2}$.

$$k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\frac{9m^2-36}{3}-3m(m-2\sqrt{2})-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3m^2-12-3m^2+6\sqrt{2}m-6\sqrt{2}m+12}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}=0.$$

因为点 P 在直线 l 的左上方, 因此 $\angle APB$ 的平分线是平行于 y 轴的直线, 所以 ΔPAB 的内切圆圆心在直线 $x=3\sqrt{2}$ 上.

(2) 由 $\angle APB=60°$, 结合 (1) 知 $k_{PA}=\sqrt{3}$, $k_{PB}=-\sqrt{3}$. 于是直线 PA 的方程为: $y-\sqrt{2}=\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$, 代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 消去 y 得 $14x^2+9\sqrt{6}(1-3\sqrt{3})x+18(13-3\sqrt{3})=0$, 它的两根分别为 x_1 和 $3\sqrt{2}$, 所以 $x_1\cdot 3\sqrt{2}=\frac{18(13-3\sqrt{3})}{14}$, 即 $x_1=\frac{3\sqrt{2}(13-3\sqrt{3})}{14}$, 故 $|PA|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot|x_1-3\sqrt{2}|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}$. 同理 $|PB|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}$, 故

$$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin 60°=\frac{117\sqrt{3}}{49}.$$

评注: 本题采用逆向思考的方法, 题目给出条件: 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 以及定点 P, 使得"直线 PA 的斜率与 PB 的斜率互为相反数", 不仅如此还对"$\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上"这一目标作进一步掩盖和隐藏, 增加发现和探索的难度, 使得试题更加具有竞赛题的意味.

在以上三个问题的讨论中可以看到, 通过对问题1的推广、逆向操作条件与结论、对条件与结论进行遮盖和隐蔽创造出两道优秀的试题. 这样的问题变式对学生而言是学习数学、培养数学兴趣、发展提出问题并解决问题能力的良好素材, 对教师而言是灵动地把握教学, 潜移默化地发展学生思维能力, 进行科学的命题和测试的良好手段.

参考文献

[1] 周立强. 抛物线的一个有趣性质及应用 [J]. 数学教学通讯 (教师阅读), 2008 (10): 33, 43.

[2] 厉倩, 李立双. 一道导数题的方法变式与问题变式 [J]. 中学数学研究, 2010 (5): 38–39.

[3] 王建荣. 定点问题的变式 [J]. 中学生数学, 2007 (8): 31–32.

对一道数学高考题的研究

663300 云南省广南一中 玉邴图

2010年全国高考安徽卷文科第17题(理科第19题)是:

椭圆E经过点$A(2,3)$,对称轴为坐标轴,焦点F_1、F_2在x轴上,离心率$e=\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆E的方程;

(2) 求$\angle F_1AF_2$的平分线所在直线的方程(以下简称问题).

该问题是以椭圆焦点三角形内心为背景进行命制的,笔者认为它是一个很好的研究性学习问题.

1. 问题的推广

定理1 设点P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上除去四个顶点外的一点,点$E$、$F$分别是左、右焦点,点$A$是$\triangle PEF$的内心,$e$是椭圆的离心率,$\angle EPF$的平分线所在的直线为$l$.

(1) 若点P的坐标为(x_1,y_1),则l的方程为$\frac{x}{x_1}+\frac{(e^2-1)y}{y_1}-e^2=0$;

(2) 若点A的坐标为(x_2,y_2),则l的方程为$\frac{x}{x_2}+\frac{(e-1)y}{y_2}-e=0$.

证明: (1) 设PA交x轴于点B,$E(-c,0)$、$F(c,0)$,如图1. e是离心率,由三角形内角平分线性质定理知

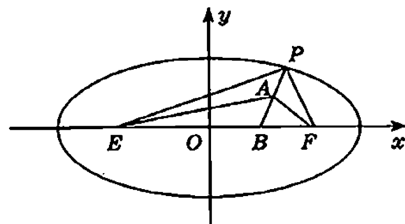


图1

$$\frac{|BA|}{|AP|}=\frac{|EB|}{|EP|}=\frac{|FB|}{|FP|}=\frac{|EB|+|FB|}{|PE|+|PF|}=\frac{2c}{2a}=e,$$

$$\therefore \frac{|FB|}{|PF|}=e,$$

故$|PF|=\frac{1}{e}|FB|=\frac{1}{e}(c-x_B)=a-\frac{x_B}{e}$.

另一方面,由椭圆焦半径公式知$|PF|=a-ex_P$,比较两式得$\frac{x_B}{e}=ex_P$,所以$x_B=e^2x_P=e^2x_1$,故得点$B(e^2x_1,0)$. 所以平分线PB的斜率$k=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{y_1-0}{x_1-e^2x_1}=\frac{y_1}{x_1(1-e^2)}$,故所求的角平分线方程为$y-0=\frac{y_1}{x_1(1-e^2)}(x-e^2x_1)$;即

$$\frac{x}{x_1}+\frac{(e^2-1)y}{y_1}-e^2=0.$$

(2) 由(1)的证明得$\lambda=\frac{BA}{AP}=e$,故由定比分点公式知

$$x_A=\frac{x_B+\lambda x_P}{1+\lambda}=\frac{e^2x_P+ex_P}{1+e}=ex_P,$$

$$\therefore x_P=\frac{x_A}{e}=\frac{x_2}{e}.$$

由$\lambda=\frac{BA}{AP}=\frac{y_A-y_B}{y_P-y_A}=\frac{y_A-0}{y_P-y_A}=e$,

知$y_P=\frac{1+e}{e}y_A=\frac{1+e}{e}y_2$,故得点$P\left(\frac{x_2}{e},\frac{1+e}{e}y_2\right)$.

所以平分线PA的斜率$k=\frac{y_A-y_P}{x_A-x_P}=\frac{y_2-\frac{1+e}{e}y_2}{x_2-\frac{x_2}{e}}=\frac{y_2}{x_2(1-e)}$,故所求方程为$y-y_2=\frac{y_2}{x_2(1-e)}(x-x_2)$,即

$$\frac{x}{x_2}+\frac{(e-1)y}{y_2}-e=0.$$

定理2 设$P(x_1,y_1)$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$上除去两个顶点外的一点,点$E$、$F$分别是左、右焦点,点$A$是$\triangle PEF$的内

心, 则$\angle EPF$的内角平分线PA所在的直线方程为$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

证明: 不妨设点P在右分支上, PA交x轴于点$B(x_2,0)$, $E(-c,0)$、$F(c,0)$, 双曲线的离心率为e. 则由双曲线右分支的焦半径公式及三角形内角平分线性质定理得$\frac{|PE|}{|PF|}=\frac{|EB|}{|FB|}$,

$\therefore \frac{ex_1+a}{ex_1-a}=\frac{x_2-(-c)}{c-x_2}$, 即$x_2=\frac{a^2}{x_1}$.

所以, 内角平分线PA的斜率

$$k=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{x_1}}=\frac{x_1y_1}{x_1^2-a^2}.$$

故内角平分线PA的方程为$y-0=\frac{x_1y_1}{x_1^2-a^2}\left(x-\frac{a^2}{x_1}\right)$, $\therefore x_1y_1x+(a^2-x_1^2)y=y_1a^2$, 即$b^2x_1y_1x+(a^2b^2-b^2x_1^2)y=y_1a^2b^2$.

因为点$P(x_1,y_1)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上, 所以$a^2b^2-b^2x_1^2=-a^2y_1^2$, 代入上式得$b^2x_1y_1x-a^2y_1^2y=y_1a^2b^2$, $\therefore b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$, 即$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

2. 问题的引申

若我们将内心引申为旁心进行研究, 则得

定理3 设点$P(x_1,y_1)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上除去四个顶点外的一点, 点$E$、$F$分别是左、右焦点, 点$A$是$\triangle PEF$的旁心, 则$\angle EPF$的外角平分线$PA$所在的直线方程为$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

证明: 不妨设旁心A是$\angle PEF$的内角平分线和$\angle EPF$及$\angle EFP$的外角平分线的交点, 直线PA交x轴于点$B(x_2,0)$, $E(-c,0)$、$F(c,0)$, 椭圆的离心率为e. 则由椭圆焦半径公式及三角形外角平分线性质定理得$\frac{|PE|}{|PF|}=\frac{|EB|}{|FB|}$, $\therefore \frac{a+ex_1}{a-ex_1}=\frac{x_2+c}{x_2-c}$, 即$x_2=\frac{a^2}{x_1}$.

所以外角平分线PA的斜率

$$k=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{x_1}}=\frac{x_1y_1}{x_1^2-a^2}.$$

故外角平分线PA的方程为$y-0=\frac{x_1y_1}{x_1^2-a^2}\left(x-\frac{a^2}{x_1}\right)$, $\therefore x_1y_1x+(a^2-x_1^2)y=y_1a^2$, 即$b^2x_1y_1x+(a^2b^2-b^2x_1^2)y=y_1a^2b^2$.

因为点$P(x_1,y_1)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上, 所以$a^2b^2-b^2x_1^2=a^2y_1^2$, 代入上式得$b^2x_1y_1x+a^2y_1^2y=y_1a^2b^2$, $\therefore b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$, 即$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

定理 4 设点P是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$上除去两个顶点外的任一点, 点E、F分别是左、右焦点, 点A是$\triangle EPF$的旁心, 双曲线的离心率为e, $\angle EPF$的外角平分线所在的直线为l.

(1) 若点P的坐标为(x_1,y_1), 则l的方程为$\frac{x}{x_1}+\frac{(e^2-1)y}{y_1}-e^2=0$;

(2) 若点A的坐标为(x_2,y_2), 则l的方程为$\frac{x}{x_2}+\frac{(e-1)y}{y_2}-e=0$.

证明: (1) 不妨设旁心A是$\angle PEF$(或$\angle PFE$)的内角平分线和$\angle EPF$及$\angle EFP$(或$\angle FEP$)的外角平分线的交点, PA交x轴于点B, $E(-c,0)$、$F(c,0)$.

当点P在右分支上时, 如图2所示. 由三角形内、外角平分线性质定理知

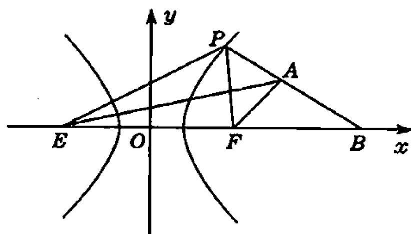


图2

$$\frac{|BA|}{|AP|}=\frac{|EB|}{|EP|}=\frac{|FB|}{|FP|}=\frac{|EB|-|FB|}{|PE|-|PF|}=\frac{2c}{2a}=e,$$ 所以$\frac{|FB|}{|FP|}=e$, 即$|PF|=\frac{1}{e}|FB|$. ①

由①得$|PF|=\frac{1}{e}|FB|=\frac{1}{e}(x_B-c)=\frac{x_B}{e}-a$.

另一方面, 由双曲线的右焦半径公式知$|PF|=ex_P-a$. 比较两式得$\frac{x_B}{e}=ex_P$.

当点P在左分支上时, 如图3所示.

由三角形内、外角平分线性质定理知$\frac{|BA|}{|AP|}=\frac{|FB|}{|FP|}=\frac{|EB|}{|EP|}=\frac{|FB|-|EB|}{|PF|-|PE|}=\frac{2c}{2a}=e$, 故$\frac{|EB|}{|EP|}=e$, 即$|PE|=\frac{1}{e}|EB|$. $\cdots$②

由②得$|PE|=\frac{1}{e}|EB|=\frac{1}{e}(-c-x_B)=-a-\frac{x_B}{e}$.

另一方面，由双曲线的左焦半径公式知$|PF|=-ex_P-a$. 比较两式得$-a-\frac{x_B}{e}=-ex_P-a$，从而得$\frac{x_B}{e}=ex_P$.

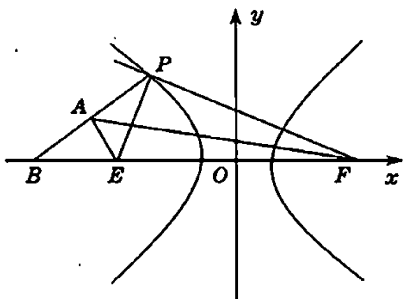


图3

所以$x_B=e^2x_P=e^2x_1$，故点$B(e^2x_1,0)$.

所以角平分线PB的斜率$k=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{y_1-0}{x_1-e^2x_1}=\frac{y_1}{x_1(1-e^2)}$，故所求的角平分线方程为$y-0=\frac{y_1}{x_1(1-e^2)}(x-e^2x_1)$，即

$$\frac{x}{x_1}+\frac{(e^2-1)y}{y_1}-e^2=0.$$

(2) 由(1)的证明得$\lambda=\frac{BA}{AP}=e$，故由定比分点公式知

$$x_A=\frac{x_B+\lambda x_P}{1+\lambda}=\frac{e^2x_P+ex_P}{1+e}=ex_P,$$

$$\therefore x_P=\frac{x_A}{e}=\frac{x_2}{e}.$$

由定比分点公式知

$$\lambda=\frac{BA}{AP}=\frac{y_A-y_B}{y_P-y_A}=\frac{y_A-0}{y_P-y_A}=e,$$

故$y_P=\frac{1+e}{e}y_A=\frac{1+e}{e}y_2$，故得点$P\left(\frac{x_2}{e},\frac{1+e}{e}y_2\right)$. 所以角平分线$PA$的斜率

$$k=\frac{y_A-y_P}{x_A-x_P}=\frac{y_2-\frac{1+e}{e}y_2}{x_2-\frac{x_2}{e}}=\frac{y_2}{x_2(1-e)}.$$

故所求的方程为$y-y_2=\frac{y_2}{x_2(1-e)}(x-x_2)$，即$\frac{x}{x_2}+\frac{(e-1)y}{y_2}-e=0$.

3. 结论的应用

下面举例说明这两个定理的应用.

例1 (2010年全国高考安徽卷文科第17、理科第19题)椭圆E经过点$A(2,3)$，对称轴为坐标轴，焦点F_1、F_2在x轴上，离心率$e=\frac{1}{2}$. 求$\angle F_1AF_2$的平分线所在直线的方程.

解：因为$x_1=2,y_1=3$，而$e=\frac{1}{2}$，由题意及定理1(1)得$\angle F_1AF_2$的平分线所在直线的方程为$\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{1}{4}-1\right)y}{3}-\frac{1}{4}=0$，即$2x-y-1=0$.

例2 点P在椭圆$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$上，且位于第三象限，$E$、$F$分别是椭圆的左、右焦点，若$\triangle PEF$的面积为20，求$\angle EPF$的内角平分线所在直线的方程.

解：因为$a=3\sqrt{5},b=2\sqrt{5},c=5,e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，设$P(x_1,y_1)$，则由题意得$\triangle PEF$的面积

$S=\frac{1}{2}|EF||y_P|=c|y_1|=5|y_1|=20$，所以$|y_1|=4$，代入椭圆方程解得$|x_1|=3$.

因为点P位于第三象限，所以点P的坐标为$(-3,-4)$.

由定理1(1)知，角平分线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{\left(\frac{5}{9}-1\right)y}{-4}-\frac{5}{9}=0$，即$3x-y+5=0$.

例3 点$P(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$在双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$上，E、F分别是双曲线的左、右焦点，在$\triangle PEF$中，求$\angle EPF$的内角平分线PA所在直线的方程.

解：因为$a=1,b=\sqrt{3},x_1=-\sqrt{2},y_1=-\sqrt{3}$，由题意和定理2得$PA$所在的直线方程为$-\sqrt{2}x-\frac{-\sqrt{3}y}{3}=1$，即$\sqrt{6}x-y+\sqrt{3}=0$.

例4 点$P(\sqrt{3},-2)$在椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$上，$E$、$F$分别是椭圆的左、右焦点，在$\triangle PEF$中，求$\angle EPF$的外角平分线$PA$所在直线的方程.

解：因为$a=3,b=\sqrt{6},x_1=\sqrt{3},y_1=-2$，由题意和定理3得$PA$所在的直线方程为$\frac{\sqrt{3}x}{9}+\frac{-2y}{6}=1$，即$\sqrt{3}x-3y-9=0$.

在解题过程中关注命题转化的等价性

201801 上海市育才中学 徐 倩

笔者今年带教高一, 在教"充分条件和必要条件"的拓展课时, 给出这样一个问题:

例 已知关于x的方程$x^2+(k-2)x+k+6=0$有两个大于1的实数根, 求实数k的取值范围.

此题解法多样, 常见的解法及其相应的学生易错点有:

1. *使用求根公式将问题转化为求解相应的无理不等式.*

分析: 无理不等式已从高中课程标准中删除, 其难点在于去根号时要注意不等式的等价变形, 不能只顾两边平方, 所以大部分采用此思路解决问题的学生都错在无法正确解出相应的无理不等式.

2. *写出"已知关于x的方程$x^2+(k-2)x+k+6=0$有两个大于1的实数根"的充要条件, 继而求解.*

分析: 此类解法学生最常犯的错误就是认为其充要条件为$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2>2,\\ x_1x_2>1,\end{cases}$ 其实这只是原命题的必要条件, 逆向验证其充分性可立即找出反例: $x_1=0.7$, $x_2=4.3$. 原命题的充要条件应该是$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1-1+x_2-1>0,\\ (x_1-1)(x_2-1)>1.\end{cases}$

3. *利用数形结合, 设$f(x)=x^2+(k-2)x+k+6$, 据题意, $f(x)$的图像与x轴的交点的横坐标均大于1.*

分析: 此类解法学生最常犯的错误就是将图像特征转化为$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(1)>0,\end{cases}$ 其实这也只是原命题的必要条件, 逆向验证其充分性可立即找出反例: 虽然$\Delta\geqslant 0$且$f(1)>0$, 但$f(x)$的对称轴位置在直线$x=1$的左侧. 原命题的充要条件应该是$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(1)>0,\\ -\dfrac{k-2}{2}>1.\end{cases}$

上述三类常见的易错点有这样一个共同的特征: 学生只理解了题目条件 (即原命题) 的必要条件, 没有逆向验证其是否也满足充分性, 即无法正确写出题目条件 (即原命题) 的充要条件, 而将问题进行等价转化又恰恰是解决所有问题的先决条件. 至此, 我们不难发现, 高中数学在将问题进行等价转化的要求上比初中高很多, 所以"充分条件与必要条件"的教学是初、高中衔接的一个重要着眼点!

上述问题在整个高中数学教学中都有所体现, 笔者回想去年的高三教学, 发现许多问题都出在对题目条件的等价转化上. 下面举几个例子供参考.

例1 方程$x^2+a|x|+a^2-9=0\,(a\in\mathbf{R})$有唯一的实数根, 则$a=$________.

错解: 令$t=|x|\geqslant 0$, 则原方程有唯一的实数根等价于方程$t^2+at+a^2-9=0\,(a\in\mathbf{R})$ ······························· ① 只有唯一解$t=0$, 因此将$t=0$代入方程①得$a^2-9=0$, 从而解得$a=\pm 3$.

例5 点P在双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$上, E、F分别是双曲线的左、右焦点, $\triangle PEF$的旁心$A(6,-5)$, 求PA所在直线的方程.

解: 因为$a=3, b=\sqrt{7}, c=4, e=\dfrac{4}{3}, x_2=6, y_2=-5$, 由题意和定理4 (2) 得$PA$所在直线的方程为$\dfrac{x}{6}+\dfrac{\left(\frac{4}{3}-1\right)y}{-5}-\dfrac{4}{3}=0$, 即$5x-2y-40=0$.

究其错误原因, 首先, "方程①只有唯一解$t=0$"只是原命题"$x^2+a|x|+a^2-9=0\,(a\in\mathbf{R})$"有唯一实数根的充分条件. 其次, "将$t=0$代入方程①得$a^2-9=0$, 从而解得$a=\pm3$"也只是"方程①只有唯一解$t=0$"的必要条件. 由于对原命题的两次转化均非等价, 所以解答错误.

原命题的等价命题应为"方程①只有唯一解$t=0$或有两个不同的解$t_1=0$且$t_2<0$". 所以可以从"方程①必有一解$t=0$"这一原命题的必要条件出发将$t=0$代入方程①解得$a=\pm3$, 再进一步检验$a=\pm3$时方程①的解的情况是否符合"只有唯一解$t=0$或有两个不同的解$t_1=0$且$t_2<0$"即可, 从而舍去$a=-3$, 例1的正确答案为3.

例2 有一道解三角形的问题, 缺少一个条件, 具体如下: "在$\triangle ABC$中, 已知$a=\sqrt{3}$, $B=45^\circ$, ________, 求A的大小." 经推断, 空格中缺少的条件为三角形一边的长度, 且答案提示$A=60^\circ$, 试将所缺的条件补充完整.

错解: 将原问题转化为"在$\triangle ABC$中, 已知$a=\sqrt{3}$, $B=45^\circ$, $A=60^\circ$, 求三角形另一边的长度", 于是由正弦定理可解得$b=\sqrt{2}$.

若检验一下便知, 当$b=\sqrt{2}$时, $A=60^\circ$或120°, 与题意不符, 因此解答错误. 其错误原因在于答案"$A=60^\circ$"的等价命题应该是A有且只有一解为60°, 而非A有解为60°. 此时避免错误的方法是注意等价命题的转化, 判断已知两边一对角时, 三角形的解的个数情况, 从而可以转变为求c边, 使得问题的已知条件为已知两边一夹角, 则三角形的解的情况唯一. 具体解答过程如下: $C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$, 由正弦定理知$c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, 填入空格即可.

例3 设两个向量$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$, 满足$|\overrightarrow{e_1}|=2$, $|\overrightarrow{e_2}|=1$, $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$夹角为60°, 若向量$2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$与向量$\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta$为钝角, 求实数$t$的取值范围.

错解: 因为向量$2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$与向量$\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta$为钝角, 所以$\cos\theta<0$, 即$(2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2})<0$, ……

究其错误原因, $\cos\theta<0$只是向量$2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$与向量$\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta$为钝角的必要非充分条件, 两个向量反向即为反例. 其充要条件应该是$(2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2})<0$且向量$2t\overrightarrow{e_1}+7\overrightarrow{e_2}$与向量$\overrightarrow{e_1}+t\overrightarrow{e_2}$不能反向.

将数学问题中的条件进行等价转化固然重要, 但善于利用其必要条件往往可以为问题的解决开辟一个崭新的入口, 请看下面两道题.

例4 若$f(x)=a\cdot\sin x+3\cos x$是偶函数, 求实数$a$的值.

分析: 此题解决的方法之一可以是严格按照"$f(x)=a\cdot\sin x+3\cos x$是偶函数"的等价命题"对$\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)=f(-x)$恒成立"解得实数a的值. 但如果利用其必要条件$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$可快速解得$a=0$, 再进一步检验"$a=0$"是否为"$f(x)=a\cdot\sin x+3\cos x$是偶函数"的充分条件即可.

例5 对任意自然数n, 求使等式$\dfrac{1^2}{1\cdot3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+a)}{2(2n+b)}$恒成立的整数$a$、$b$的值.

分析: 此题无法对等式左边进行化简处理, 从而无法直接对此等式恒成立进行等价转化. 然而, 使等式

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+a)}{2(2n+b)}$$

恒成立的一个必要条件是$n=1$、2时等式均成立, 从而可以获得一个关于a、b的二元一次方程组, 解出相应的a、b, 再用数学归纳法进一步证明其充分性即可.

综上所述, 通过"充分条件与必要条件"的教学可以让学生深刻认识到: 在解题过程中应充分关注命题转化的等价性, 偶尔灵活使用原命题的必要条件, 也能为问题的解决提供一个崭新的入口!

破解题设中的隐含条件

743000 甘肃省定西市一中 刘占溪

一个数学问题的条件, 有时比较显露, 有时比较隐蔽, 有时又在显露中暗含着隐蔽, 我们把这种隐蔽在题设中的已知条件称为隐含条件. 隐含条件既有积极的暗示作用, 又有消极的干扰作用.如果我们在解题时忽视了发掘隐含条件, 可能会陷入困境或造成错误; 而若深入挖掘了隐含条件, 将会事半功倍, 出奇制胜!

一、重视题设内的隐含条件

通常情况下, 题目中的已知条件都是明显的, 但是有些题目的某些已知条件却隐含在图形中或问题的实际意义以及已知条件之间的关系内.

例1 已知正方形$ABCD$内一点P到三个顶点A、B、C的距离分别为$PA=\sqrt{7}$, $PB=1$, $PC=3$, 求正方形的边长.

解1: 设正方形的边长为a, $\angle ABP=\theta$, 则$\angle PBC=90^\circ-\theta$.

由余弦定理有$7=a^2+1-2a\cos\theta$, $9=a^2+1-2a\cos(90^\circ-\theta)$,

两式消去θ得$a^4-16a^2+50=0$, 解得$a=\sqrt{8\pm\sqrt{14}}$.

分析: 上述答案有问题! 因为没有考虑取舍!

由点P在正方形$ABCD$内, 应有$AB+BC>AP+PC$, 即$2a>\sqrt{7}+3>2\sqrt{8-\sqrt{14}}$, 所以$a\neq\sqrt{8-\sqrt{14}}$;

又因为$8+\sqrt{14}<8+\sqrt{28}$, 即$8+\sqrt{14}<(1+\sqrt{7})^2$, 亦即$\sqrt{8+\sqrt{14}}<1+\sqrt{7}<1+3$, 所以$a=\sqrt{8+\sqrt{14}}$.

二、深入挖掘, 出奇制胜

1. 挖掘几何意义

许多数学概念都有其明确的几何意义, 深入挖掘, 恰当运用, 可使繁杂问题直观化、简单化.

例2 (2007年全国高中数学联赛试题)设实数a, 使得不等式$|2x-a|+|3x-2a|\geqslant a^2$对任意实数$x$恒成立, 则满足条件的$a$所组成的集合是…………………………( )

(A) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$; (B) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$;

(C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$; (D) $[-3,3]$.

分析: 参考答案是先去掉绝对值符号, 再由对任意实数x不等式恒成立, 分别找出不同情形下a的范围, 最后合并得到a的集合, 过程繁复, 出错率很高.

如果抓住绝对值概念的距离特征, 将原不等式变形为$2\left|x-\frac{a}{2}\right|+3\left|x-\frac{2a}{3}\right|\geqslant a^2$, 问题便转化为:

动点$P(x)$到定点$A\left(\frac{a}{2}\right)$距离的2倍与到定点$B\left(\frac{2a}{3}\right)$(若$a>0$时如图1, $a\leqslant0$时同理)距离的3倍之和最小时, 求点P的位置.

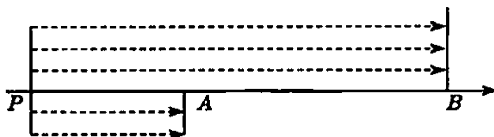


图1

如图2, 当点P运动到点B时, 虚线重复最少, 将$x=\frac{2a}{3}$代人原不等式得答案$a\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.



图2

2. 关注数字特征

挖掘数的特点, 寻找数之间的内在规律是数学研究的重要任务, 解数学题目时同样要充分挖掘条件中的数字关系.

例3 若$2A+2B+C=0$, 试求直线$Ax+By+C=0$被抛物线$y^2=2x$所截得的弦的中点的轨迹方程.

分析: 一般都会直接联立直线和抛物线方程, 再用韦达定理求解. 但仔细观察条件$2A+2B+C=0$便会发现: 点$P(2,2)$既在直线$Ax+By+C=0$上, 又在抛物线$y^2=2x$上, 若设弦中点$M(x,y)$, 可求出弦PQ的另一端点坐标$Q(2x-2,2y-2)$, 再代人$y^2=2x$便得点M的轨迹方程为$(y-1)^2=x-1$.

3. 寻找结构特征

结构体现着问题的独特性, 找到了问题的结构特征就等于抓住了问题的关键, 自然也就容易找到解题的思路.

例4 (2011年"希望杯"高二试题) 如果关于x的不等式$\dfrac{mx+1}{2x^2+ax-1}\geqslant n$($m$、$a$、$n$是常数)的解集是$[-2,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$, 那么, $a=$______, $m=$______.

解: 此题若是想当然将分式不等式转化为不等式组去解, 会涉及三个参数的讨论, 过程繁琐、冗长!

若将原不等式变形为$\dfrac{2nx^2-(m-an)x-(n+1)}{2x^2+ax-1}\leqslant 0$, 抓住分式中分子能取零而分母不能取零和解集中区间$[-2,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$的闭、开的结构特征, 便可得出$-2$和$1$是二次方程$2nx^2-(m-an)x-(n+1)=0$的两个根, -1和$\dfrac{1}{2}$是二次方程$2x^2+ax-1=0$的两个根, 依韦达定理很容易得$a=1$, $n=\dfrac{1}{3}$, $m=-\dfrac{1}{3}$.

4. 挖掘图像性质

图像是数学问题的直观形式, 因此在解题时可以借助图像解题.

例5 (2003年"希望杯"高一试题) 函数$f(x)=x^2-3(x\leqslant 0)$的反函数$f^{-1}(x)$, 则不等式$f(x)<f^{-1}(x)$的解集是 ·············· ( )

分析: 解此题的常规思路是: 求出反函数$f^{-1}(x)=-\sqrt{x+3}(x\geqslant -3)$, 然后解无理不等式$x^2-3<-\sqrt{x+3}$, 运算量大, 错误率高!

抓住原函数与反函数图像关于直线$y=x$对称的特点, 画个草图(如图3)就可看出不等式的解集应为$(x_0,0]$, 其中x_0是方程$x^2-3=x$的根, $f(x)<f^{-1}(x)$的解集是$\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},0\right]$.

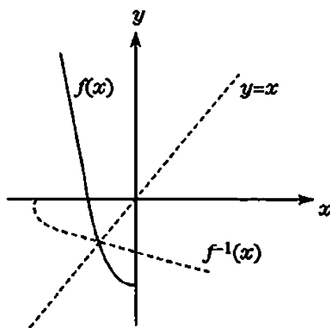


图3

5. 变换表述方式

例6 (牛吃草问题)牧场上有一片青草, 每天都生长得一样快. 这片青草放牧24头牛吃, 可以吃6天. 放牧21头牛吃, 可以吃8天. 假设每头牛每天吃草量相等, 问(1)如果放牧16头牛吃, 可以吃几天? (2)要使青草永远吃不完, 至多放牧几头牛?

此题条件穿插交错, 不易把握, 如果我们换一种熟悉的表述方式, 思路就明朗多了.

变式1: 快、中、慢三辆摩的同时从同一地出发, 沿同一公路追赶前面一匀速行驶的自行车, 快车以每小时24公里的行速6小时可追上, 中车以每小时21公里的行速8小时可追上, 问(1)如果慢车以每小时16公里的行速几小时可追上? (2)慢车最大行速在每小时几公里以内时将永远追不上自行车?

变式2: 如图4, 快、中、慢三辆摩的同时从N地出发, 分别在A、B、C处追上同时从M处出发的自行车, 行速与追击时间见下表

车型	行速	追击时间
快	24	6
中	21	8
慢	16	x
自行车	v	

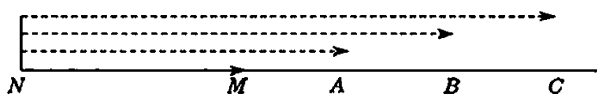


图4

解: 由 $|NM| = 6(24-v) = 8(21-v) = x(16-v)$, 解得 $v = 12$, $x = 18$.

(1) 慢车用18小时方可追上骑车人, (2) 若慢车行速 $v \leqslant 12$ 公里/时, 将永远追不上骑车人.

6. 建立映射关系

例7 如图5将正三角形 ABC 的各边 n 等分, 过各分点在三角形内作三边的平行线, 求边长为 $\dfrac{BC}{n}$ 的小菱形的个数.

分析: 如果我们的研究对象离不开小菱形, 则因图形中扑朔迷离的重叠关系, 计算困难, 容易出错!

随便拿出一个小菱形出来 (图中阴影), 不难发现它们都有唯一一条已画的对角线, 于是我们便在小菱形与三角形内的线段之间建立起了一一对应关系, 因而我们的统计对象由小菱形变为三角形内的线段. 易得边长为 $\dfrac{BC}{n}$ 的小菱形个数为 $3[1+2+3+\cdots+(n-1)] = \dfrac{3}{2}n(n-1)$ (个).

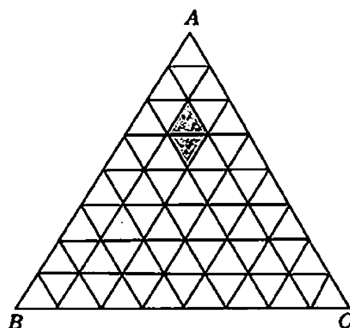


图5

(上接第7—11页)

$$=\frac{1}{2}\Big(\sin\frac{A+B-C}{2}+\sin\frac{A+C-B}{2}+\sin\frac{B+C-A}{2}+\sin\frac{B+A-C}{2}+\sin\frac{C+A-B}{2}+\sin\frac{C+B-A}{2}-1\Big)$$

$$=\Big(\sin\frac{\pi-2A}{2}+\sin\frac{\pi-2B}{2}+\sin\frac{\pi-2C}{2}-1\Big)$$

$$=(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\frac{r}{R},$$

即 $\dfrac{r'}{R'} \geqslant \dfrac{r}{R}$.

(当且仅当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时"$\geqslant$"取等号)

如图3, $\triangle ABC$ 的外接圆过 $\triangle O_1O_2O_3$ 的三条高 O_1A、O_2B、O_3C 的垂足 A、B、C, 所以 $\triangle ABC$ 的外接圆必过 O_2O_3、O_3O_1、O_1O_2 的中点 M_1、M_2、M_3 (九点圆性质). 而 $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 是位似比为 -2 的位似图形, $\therefore R' = 2R$. 这样我们得到 $\dfrac{r'}{2R} \geqslant \dfrac{r}{R}$, 即 $r' \geqslant 2r$.

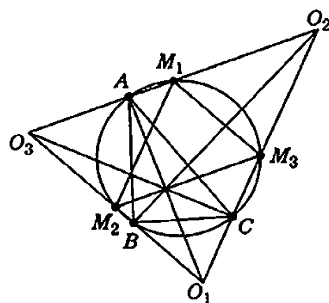


图3

又 $\because R' \geqslant 2r'$, $\therefore 2R \geqslant 2r'$, 即 $R \geqslant r'$.

所以 $R \geqslant r' \geqslant 2r$, 当且仅当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时等号成立.

这是欧拉不等式的最简隔离! 它充分体现了简洁、和谐的数学形式美. 那么四边形是否也具有这样类似的性质呢? 为此, 笔者利用几何画板进一步对双圆四边形 (既有内切圆又有外接圆的四边形) 进行了探讨, 得到一个猜想:

设四边形 $ABCD$ 是双圆四边形, 它的内切圆、外接圆、以及以它的旁切圆圆心 O_1、O_2、O_3、O_4 为顶点的四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 的外接圆半径分别是 r、R 以及 R' (如果外接圆存在), 则有 $R' \geqslant \sqrt{2}R \geqslant 2r$, 当且仅当四边形 $ABCD$ 是正方形时等号成立.

关于本刊“数学问题与解答”的几例探讨

050035 河北省石家庄学院数学系 王玉怀

贵刊“数学问题与解答”栏目中的数学问题,很多题目的难度与奥数题相当,且其解题方法新颖、构思巧妙,笔者读后深受启发.但其中不等式证明的一些题目,若应用AM—GM不等式[1]或幂平均不等式等常规方法,可以获得另外的解答.请见以下各例.

例1 (2011年第2期《数学教学》865题)已知$x_1, x_2, \cdots, x_n$为小于1的正数,且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,求证:

$$\frac{1}{x_1-x_1^3}+\frac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\frac{1}{x_m-x_m^3}\geqslant\frac{n^4}{n^2-1}. \cdots\cdots ①$$

证:设A=①式的左端,$B=1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3$,由$AM$—$GM$不等式得以下$n$个不等式:

$$\frac{\frac{1}{x_i-x_i^3}}{A}+\frac{x_i-x_i^3}{B}\geqslant\frac{2\cdot 1}{\sqrt{AB}}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$,

将以上n个不等式相加,得

$$\frac{A}{A}+\frac{B}{B}\geqslant\frac{2\cdot n}{\sqrt{AB}},$$

约去2,然后两边平方,整理得

$$A\geqslant\frac{n^2}{B}=\frac{n^2}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3},\text{由幂平均不等式得}$$

$$A\geqslant\frac{n^2}{1-n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3}=\frac{n^2}{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{n^4}{n^2-1},$$

(1)式得证.

注:原证是先证一个不等式,再利用二次函数的单调性等,运算较复杂.而由上述证法不难将(1)式推广为:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-x_i^m}\geqslant\frac{n^{m+1}}{n^{m-1}-1}\ (\text{其中}\ m\geqslant 3).$$

例2 (2010年第6期《数学教学》793题)已知a、b、c、$d\in\mathbf{R}^+$,$abcd=1$,求证:

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geqslant a+b+c+d. \cdots\cdots ②$$

证:设$A=a^3+b^3+c^3+d^3$,$B=4$.

由$AM-GM$不等式得以下4个不等式:

$$\frac{a^3}{A}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{3a}{\sqrt[3]{4^2A}},$$

$$\frac{b^3}{A}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{3b}{\sqrt[3]{4^2A}},$$

$$\frac{c^3}{A}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{3c}{\sqrt[3]{4^2A}},$$

$$\frac{d^3}{A}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{3d}{\sqrt[3]{4^2A}},$$

将上述4个不等式相加,得

$$\frac{A}{A}+2\geqslant\frac{3(a+b+c+d)}{\sqrt[3]{4^2A}},$$

约去3,然后两边3次方,整理得

$$A\geqslant\frac{1}{4^2}(a+b+c+d)^3\geqslant\frac{1}{4^2}(4\sqrt[4]{abcd})^2(a+b+c+d)=a+b+c+d,$$

(2)式得证.

注:原证是依据4元均为3次幂的形式构造了6元不等式.但用上述方法,不难推广为:若$a_i\in\mathbf{R}^+$,且$a_1a_2\cdots\cdots a_n=1$,$m\in\mathbf{N}^+$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^m\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例3 (2008年第8期《数学教学》738题)已知正数a、b、c、d满足$a^2+b^2+c^2+d^2=4$,求证:

$$\frac{1}{a(1+b^2+c^2)}+\frac{1}{b(1+c^2+d^2)}+\frac{1}{c(1+d^2+a^2)}+\frac{1}{d(1+a^2+b^2)}\geqslant\frac{4}{3}.③$$

证:设

$$A=\frac{1}{a(1+b^2+c^2)}+\frac{1}{b(1+c^2+d^2)}+\frac{1}{c(1+d^2+a^2)}+\frac{1}{d(1+a^2+b^2)},$$

$$B=4+2(a^2+b^2+c^2+d^2)=12,$$

$C=a+b+c+d$.

由 $AM-GM$ 不等式得以下4个不等式:

$$\frac{\frac{1}{a(1+b^2+c^2)}}{A}+\frac{1+b^2+c^2}{B}+\frac{a}{C}\geqslant\frac{3\cdot1}{\sqrt[3]{ABC}},$$

$$\frac{\frac{1}{b(1+c^2+d^2)}}{A}+\frac{1+c^2+d^2}{B}+\frac{b}{C}\geqslant\frac{3\cdot1}{\sqrt[3]{ABC}},$$

$$\frac{\frac{1}{c(1+d^2+a^2)}}{A}+\frac{1+d^2+a^2}{B}+\frac{c}{C}\geqslant\frac{3\cdot1}{\sqrt[3]{ABC}},$$

$$\frac{\frac{1}{d(1+a^2+b^2)}}{A}+\frac{1+a^2+b^2}{B}+\frac{d}{C}\geqslant\frac{3\cdot1}{\sqrt[3]{ABC}}.$$

将以上4个不等式相加, 得

$$\frac{A}{A}+\frac{B}{B}+\frac{C}{C}\geqslant\frac{3\cdot4}{\sqrt[3]{ABC}},$$

约去3, 然后两边3次方, 整理得

$$A\geqslant\frac{4^3}{BC}=\frac{4^3}{12(a+b+c+d)}.$$

由于 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, 不难证明

$(a+b+c+d)^2\leqslant4\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)=16$,

于是 $a+b+c+d\leqslant4$,

所以 $A\geqslant\frac{4^3}{12\cdot4}=\frac{4}{3}$,

(3) 式得证.

注: 原证是将不等式中各项变形为二次根式, 两次应用柯西不等式, 运算较复杂.

例4 (2004年第10期《数学教学》682题) 设 x、y、z 均为正数, $xy+yz+zx=1$, 求证:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leqslant\frac{9}{4}.\quad\cdots\cdots④$$

证: 将(4)式左端变为:

$$1-\frac{1}{1+x^2}+1-\frac{1}{1+y^2}+1-\frac{1}{1+z^2},$$

于是, 只要证明

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{4}.\quad\cdots\cdots⑤$$

设 $A=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}$, $B=3+x^2+y^2+z^2$,

由 $AM—GM$ 不等式得以下3个不等式:

$$\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{A}+\frac{1+x^2}{B}\geqslant\frac{2\cdot x}{\sqrt{AB}},$$

$$\frac{\frac{y^2}{1+y^2}}{A}+\frac{1+y^2}{B}\geqslant\frac{2\cdot y}{\sqrt{AB}},$$

$$\frac{\frac{z^2}{1+z^2}}{A}+\frac{1+z^2}{B}\geqslant\frac{2\cdot z}{\sqrt{AB}},$$

将以上3个不等式相加, 得

$$\frac{A}{A}+\frac{B}{B}\geqslant\frac{2(x+y+z)}{\sqrt{AB}},$$

约去2, 然后两边平方, 整理得

$$A\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{B}=\frac{(x+y+z)^2}{3+(x^2+y^2+z^2)}$$
$$=\frac{(x+y+z)^2}{1+2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)}$$
$$=\frac{(x+y+z)^2}{1+(x+y+z)^2}=\frac{1}{\frac{1}{(x+y+z)^2}+1}$$
$$\geqslant\frac{1}{\frac{1}{3(xy+yz+zx)}+1}=\frac{3}{4}.$$

(5) 式得证, 即(4)式得证.

注: 原证中的变形运算较复杂.

例5 (2011年第4期《数学教学》818题) 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 三边之长, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant2$, 求证:

$$\sqrt[n]{a+b-c}+\sqrt[n]{b+c-a}+\sqrt[n]{c+a-b}\leqslant\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}.$$

证: 由幂平均不等式的推广[2]:

$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^m\leqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^m$ (其中 $x_i\in\mathbf{R}^+$, $i=1,2,\cdots,n$; $0<m\leqslant1$)得

$$\sqrt[n]{a+b-c}+\sqrt[n]{b+c-a}\leqslant2\left(\frac{a+b-c+b+c-a}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=2\sqrt[n]{b},$$

同理

$$\sqrt[n]{b+c-a}+\sqrt[n]{c+a-b}\leqslant2\sqrt[n]{c},$$
$$\sqrt[n]{c+a-b}+\sqrt[n]{a+b-c}\leqslant2\sqrt[n]{a}.$$

以上3个不等式相加, 两边除以2, 得证(6)式.

注: 原证先用数学归纳法证明一个代数不等式, 然后作代换(即无理式→有理式→无理式).

参考文献

[1] 王亚红, 王亚辉. Radon不等式的推广及应用[J]. 数学通讯, 2007 (15): 36-37.

[2] 段刚山. 一个不等式的推广[J]. 数学通报, 2006 (5): 30-32.

2011年上海春考题再研究

200240 上海市闵行第二中学 毛六明

文[1]对2011年上海春季高考23题进行了探究, 笔者读后很受启发, 同时感到还可以继续深入对该题进行探究. 下面笔者就如何用TI图形计算器实现递推数列的数值计算、此题的一般化推广研究、迭代法估算近似值的相关结论等问题谈谈个人看法, 和同行共享.

一、原题(2011年上海春季高考第23题)

对于给定首项 $x_0 > \sqrt[3]{a}\,(a>0)$, 由递推式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)$ 得到数列 $\{x_n\}$, 且对于任意的 $n\in\mathbf{N}^+$, 都有 $x_n>\sqrt[3]{a}$, 用数列 $\{x_n\}$ 可以计算 $\sqrt[3]{a}$ 的近似值.

(1) 取 $x_0=5$, $a=100$, 计算 x_1,x_2,x_3 的值(精确到0.01), 归纳出 x_n, x_{n+1} 的大小关系;

(2) 当 $n\geqslant 1$ 时, 证明:

$$x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n);$$

(3) 当 $x_0\in[5,10]$ 时, 用数列 $\{x_n\}$ 计算 $\sqrt[3]{100}$ 的近似值, 要求 $|x_n-x_{n+1}|<10^{-4}$, 请你估计 n, 并说明理由.

(限于篇幅, 此处略解)

解: (1) 易得 $x_1=4.74$, $x_2=4.67$, $x_3=4.65$, 猜想 $x_{n+1}<x_n$;

(2) 两边作差 $x_n-x_{n+1}-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$

$$=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)-\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}x_n$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}}}{\sqrt{x_{n-1}x_n}},$$

因为 $x_n>\sqrt[3]{a}$, 可证 $x_n>x_{n+1}$, 所以 $x_n-x_{n+1}-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)=\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}}}{\sqrt{x_{n-1}x_n}}<0$,

所以 $x_n-x_{n+1}<12(x_{n-1}-x_n)$.

(3) 由(2)知 $0<x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)<\frac{1}{2^2}(x_{n-2}-x_{n-1})<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(x_1-x_2)<\frac{1}{2^n}(x_0-x_1)$,

所以只要 $\frac{1}{2^n}(x_0-x_1)<10^{-4}$ 即可, 于是只要 $2^n>10^4(x_0-x_1)$.

因为 $x_0-x_1=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{10}{\sqrt{x_0}}\right)$, 所以 $n>\log_2\left(10^4\cdot\frac{10-\sqrt{10}}{2}\right)\approx 15.1$, 所以 $n=16$.

二、用TI解决递推数列的数值计算

(1) *代数上用ans+enter来实现*

如图1, 定义函数 $f1(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$;

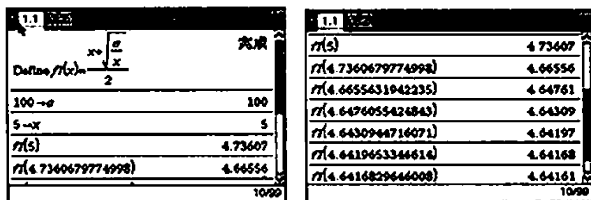


图1

把100和5分别赋值给 a, x;

按f1(ans)+enter键, 得 x_1;

第2次按enter键, 得 x_2, $\cdots$, 依次类推, 很直观地看出数列是呈递减逼近4.6416$\cdots$, 而 $\sqrt[3]{100}=4.64159\cdots$.

(2) *几何上用蛛网图实现*

如图2, 插入一个游标, 控制初始值 x_0; 选择菜单中"图形类型"为"序列", 输入表达式; 图像"属性"选择蛛网图(web图)用TI图形计算器呈现数列的图像形式多样, 还可以用"时间图", 两种图像都很直观看出, 原数列收敛在 $\sqrt[3]{100}$ 处.

三、探索问题

(1) *条件初始值 $x_0>\sqrt[3]{a}$ 是否多余?*

用拖动游标观察, 初始值 x_0 只要是定义域内大于0的数都可以. 只不过当 $x_0>\sqrt[3]{a}$ 时, 是

递减地逼近 $\sqrt[3]{a}$; 当 $x_0 < \sqrt[3]{a}$ 时, 可能递增也可能递减地逼近 $\sqrt[3]{a}$.

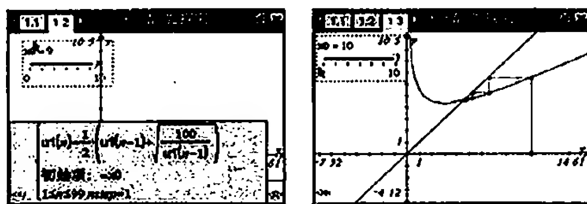


图2

如图3, 此问题讨论和初始值的选取无关, 迭代的结果总是可以逼近 $\sqrt[3]{a}$. 若问: 使数列成递增地逼近, 初值应该在什么范围取值呢? 这也容易解决, 作函数 $y=\sqrt[3]{a}$ 和函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$ 的交点, 即找到方程 $\sqrt[3]{a}=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$ 两正根 x_1、x_2, 初值 x_0 选取落在 x_1、x_2 两根之间.

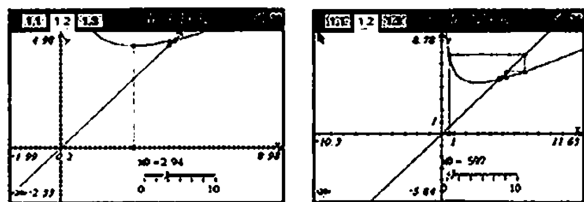


图3

(2) 为什么这个数列有极限? 而且极限是 $\sqrt[3]{a}$ 呢?

由代数的推理可知, 数列是单调递减的, 很显然 $x_n>0$, 我们知道单调有界数列必有极限. 所以, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 又因为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)$, 两边取极限, 有 $x=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$, 解得 $x=\sqrt[3]{a}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$. 命题者是如何设计出这样一个迭代算法求近似值的? 我们不难从上述推导过程中发现其踪迹: $\sqrt[3]{a}$ 是方程 $x^3=a$ 的重根, 也是方程 $x=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$ 的根, 所以设计了函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$ 来作为迭代式, 归纳过程如下:

方程 $x^3=a \iff x^2=\frac{a}{x} \iff x=\sqrt{\frac{a}{x}}$

$\iff x=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$.

所以, 迭代函数是 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$, 对应数列递推式为: $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)$.

这样不仅解决原问题, 而且认识其中的道理: 一个方程的解可以用迭代法求近似值, 从给定的初值 x_0 出发, 按迭代函数(或递推关系式), 产生一个数列 $\{x_n\}$, 此数列的极限就是方程的解.

(3) 是否有 $\sqrt[3]{a}$ 近似值的其他算法?

这一点, 完全可以从方程 $x^3=a$ 入手, 构造其他递推式.

(为方便, 取 $a=100$ 特殊情形)

方法一: 方程 $x^3=100 \iff x=\frac{100}{x^2} \iff x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{100}{x^2}\right)$, 取 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{100}{x^2}\right)$,

递推式为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{100}{x_n^2}\right)$.

方法二: 方程 $x^3=100 \iff x=\frac{100}{x^2} \iff 4x=3x+\frac{100}{x^2} \iff x=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{100}{x^2}\right)$,

取 $f(x)=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{100}{x^2}\right)$, 递推式为

$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{100}{x_n^2}\right)$.

用TI计算帮助检验一下, 验证方法一, 如图4:

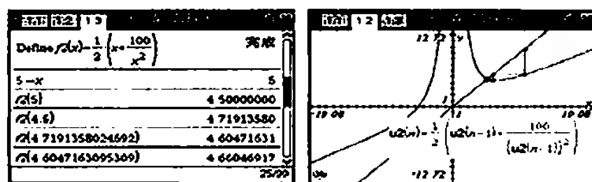


图4

验证方法二, 如图5:

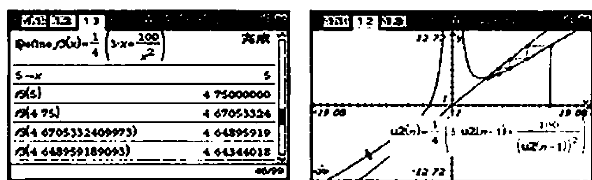


图5

一般化, 为求方程 $x^n-a=0$(或说 $\sqrt[n]{a}$)的近似值算法, 将方程改写成等价形式 $x=f(x)$, 设 $f(x)$ 是连续的, 从初始 x_0 出发, 构造递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$, 如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则 $x=\sqrt[n]{a}$. 经过有限次迭代得 x_n, 就是 x 的近似值, 迭代次数越多越精确.

两点说明:

1. 同样地, 我们可以构造 $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\cdots$ 的近似值算法. 如 $\sqrt{2}$ 的近似值算法如下:

$x^2-2=0\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$, 构造算法 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$, $x_0=5$ (如图6). 还可以构造一般的多项式零点的近似值.

Define $f5(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$	完成
5→x	5
f5(5)	2.7
f5(2.7)	1.72037
f5(1.7203703703704)	1.441455
f5(1.4414553681777)	1.414471

图6

2. 迭代式不能随意构造

如为求 $\sqrt[3]{100}$ 的近似值, 用如下方法:

方程 $x^3=100\Longleftrightarrow x^2=100-x^3+x^2\Longleftrightarrow x=\sqrt{100-x^3+x^2}$, 取 $f(x)=\sqrt{100-x^3+x^2}$ 递推式为 $x_{n+1}=\sqrt{100-x_n^3+x_n^2}$, 通过验证这是不成功的, 因为得到的数列 $\{x_n\}$ 极限不存在, 如图7.

f5(4.6415892863233)	4.64158895
Define $f4(x)=\sqrt{100-x^3+x^2}$	完成
5→x	5
f4(5)	0.00000000
f4(0.)	10.00000000
f4(10.)	"错误: 非实数结果"

图7

(4) *探求构造算法成立的条件*

对于 $\sqrt[3]{a}$ 的算法, 有四个算法(包括原题中的算法), 其中有成功的算法, 也有不成功的. 自然要探索其中道理. 还是回到原题思考:

函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)$ 和 $y=x$ 的交点是 $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$, 结合图形, 设点 A 的坐标 (x_{n-1},x_n), 则 $B(x_n,x_n)$、$C(x_n,x_{n+1})$、$D(x_{n+1},x_{n+1})$, $\therefore$ $AB=x_{n-1}-x_n$, $BC=CD=x_n-x_{n+1}$.

$\tan\angle BAC=\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_{n-1}-x_n}$,

$\therefore$ $\tan\angle BAC<\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ $(x_n-x_{n+1})<\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$.

用导数知识也可以解释. $\therefore$ $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}}$, 可知当 $x>\sqrt[3]{a}$ 时, $f'(x)<\dfrac{1}{2}$, 可以看到这其中"$\dfrac{1}{2}$"的几何意义. 同样可求方法一对应的迭代函数导数: $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{x^3}$, 方法二对应的迭代函数导数: $f'(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{a}{2x^3}$, 若 x 在 $\sqrt{a}$ 附近取值, 发现都有 $f'(x)<1$.

一般地, 设 x 是 $f(x)$ 的不动点, 如果在 x 附近有连续的一阶导数 $f'(x)$, 且 $|f'(x)|<1$, 则 x 是 $f(x)$ 吸引的不动点, 否则 x 是 $f(x)$ 排斥的不动点.

证明: 如图8, $f(x)$ 图像上对于任意两点 $A(x_{n-1},f(x_{n-1}))$, $C(x_n,f(x_n))$.

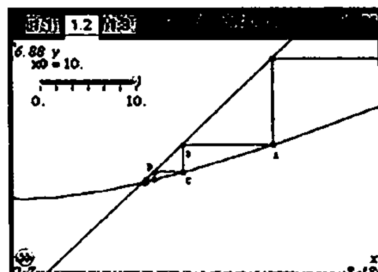


图8

$\because$ $f'(x)$ 是连续函数, 由中值定理可知, 一定存在一个 ξ, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$.

$\because$ $x_{n+1}=f(x_n), x_n=f(x_{n-1})$,

$\therefore$ $f'(\xi)=\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$, 即 $(x_{n+1}-x_n)=f'(\xi)\cdot(x_n-x_{n-1})$.

又 $\because$ $|f'(x)|<1$, 在一个有界范围内, 总是可以找到正常数 k, $|f'(\xi)|\leqslant k<1$.

$\therefore$ $|(x_{n+1}-x_n)|=|f'(\xi)|\cdot|(x_n-x_{n-1})|\leqslant k|(x_n-x_{n-1})|$,

$\therefore$ $|(x_{n+1}-x_n)|\leqslant k|(x_n-x_{n-1})|\leqslant k^2|(x_{n-1}-x_{n-2})|\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_1-x_0|$,

$\therefore \lim_{n\to\infty}|(x_{n+1}-x_n)|=0$, 所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=m$, 可证此极限 m 即为不动点 x.

有关不动点的迭代非常复杂, 这和初值的选择、不动点的个数、函数本身都有关系, 这里仅给出只有一个不动点、函数的导数是连续的情况. 有关不动点是吸引点还是排斥点, 笔者在网上查阅了一些资料, 难度很高, 再研究下去就是数学中"混沌"现象, 在此不作探索.

(5) *探索第3小题的算法*

1. 设计程序"sf()"

思考第3小题用代数方法解, 是一个放缩法, 转化为等比数列求和来估算, 存在估算的近似程度问题. 本小题是一个算法背景问题, 完全可以用TI图形计算器来设计一个程序解决, 其中条件 $|x_n-x_{n+1}|<10^{-4}$ 就是判断语句. 可以编辑如下程序sf(), 输入计算器(如图9、图10).

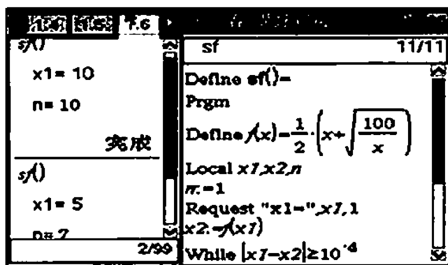


图9

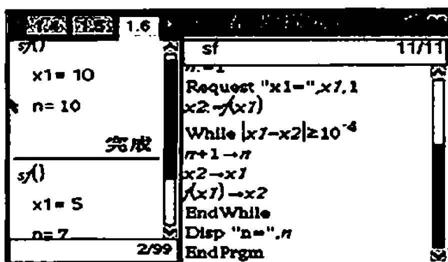


图10

```
Define sf()=
Prgm
:Define f(x)=((1)/(2))*(x+√(((100)/ (x))))
:Local x1,x2,n:n:=1
:Request "x1=",x1,1:x2:=f(x1)
:While abs(x1-x2)≥10^(-4)
:n+1→n
:x2→x1
:f(x1)→x2
:EndWhile
:Disp "n=",n
:EndPrgm
```

2. 运行程序"sf()"

当初值取10时, n 竟然是10, 和答案 $n=16$ 相差如此大! 分析原因是答案估计比较粗糙, 每次都是放大估算, 导致误差很大. 程序运行结果是精确值, $x_{10}=4.6415990995717$, $x_9=4.6416298971761$, 验证没有问题! 再次证明机器的威力.

四、小结

(1) "好"的问题蕴含丰富的内涵, 有深刻知识背景, 其实原题就涉及迭代法求方程根的问题. 探究是无止境的, 对多个不动点函数的收敛问题, 甚至对数学中"混沌"现象都可以作进一步的探究.

(2) 借助技术帮助, 有一个图形的支撑, 使得问题探索具体化, 探索也变得形象直观. 强大的代数计算也为本文中近似计算, 为猜测、证明、验证作有利的支撑.

参考文献

[1] 龚新平. 探究2011年上海春季高考压轴题[J]. 数学教学, 2011(7): 38-40.

(上接第7-2页)

能量, 思考同一个问题, 不同的主体由于知识结构、思维方式的差异, 思考问题的方法有时会出人意料. 用"言之有物"的即时评价将学生引入生成的思考环境中, 并能对老师的意图迅速地心领神会, 常常会碰撞出绚丽的火花, 生成新的更有价值的见解, 促进学生思维的敏捷和灵活, 更能使课堂妙趣横生. 若很好地运用即时评价, 则会在"山重水复疑无路"的时候, 迎来"柳暗花明又一村", 让课堂充满勃勃生机. 这不仅是一种教育的科学, 更是一种教育的艺术.

结束语: 本文中的自编错题的再改编完全是建立在学生"敢于直言"和"畅所欲言"的基础上, 从而激发学生思维, 使课堂焕发活力.

·2012年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学(必修+选修Ⅱ)

第Ⅰ卷

第Ⅰ卷共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

一、选择题

(1) 复数 $\frac{-1+3i}{1+i}=$ [答]( )

(A) $2+i$. (B) $2-i$.

(C) $1+2i$. (D) $1-2i$.

(2) 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$, $B=\{1,m\}$, $A\cup B=A$, 则 $m=$ [答]( )

(A) 0或$\sqrt{3}$. (B) 0或3.

(C) 1或$\sqrt{3}$. (D) 1或3.

(3) 椭圆的中心在原点, 焦距为4, 一条准线为 $x=-4$, 则该椭圆的方程为 [答]( )

(A) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. (B) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

(C) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. (D) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(4) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $CC_1=2\sqrt{2}$, E 为 CC_1 的中点, 则直线 AC_1 与平面 BED 的距离为 [答]( )

(A) 2. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

(5) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_5=5$, $S_5=15$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前100项和为 [答]( )

(A) $\frac{100}{101}$. (B) $\frac{99}{101}$. (C) $\frac{99}{100}$. (D) $\frac{101}{100}$.

(6) $\triangle ABC$ 中, AB 边的高为 CD, 若 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{AD}=$ [答]( )

(A) $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$. (B) $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

(C) $\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$. (D) $\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}$.

(7) 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$ [答]( )

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. (B) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{9}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(8) 已知 F_1、F_2 为双曲线 $C: x^2-y^2=2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1|=2|PF_2|$, 则 $\cos\angle F_1PF_2=$ [答]( )

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(9) 已知 $x=\ln\pi$, $y=\log_5 2$, $z=e^{-\frac{1}{2}}$, 则 [答]( )

(A) $x<y<z$. (B) $z<x<y$.

(C) $z<y<x$. (D) $y<z<x$.

(10) 已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图像与 x 恰有两个公共点, 则 $c=$ [答]( )

(A) -2或2. (B) -9或3.

(C) -1或1. (D) -3或1.

(11) 将字母 a,a,b,b,c,c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 [答]( )

(A) 12种. (B) 18种. (C) 24种. (D) 36种.

(12) 正方形 $ABCD$ 的边长为1, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, $AE=BF=\frac{3}{7}$. 动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动, 每当碰到正方形的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第一次碰到 E 时, P 与正方形的边碰撞的次数为 [答]( )

(A) 16. (B) 14. (C) 12. (D) 10.

第Ⅱ卷

第Ⅱ卷共10小题, 共90分.

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分, 把答案填在题中横线上.

(13) 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\\ x+3y-3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最小值为________.

(14) 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x(0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时, $x=$________.

(15) 若 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第3项与第7项的二项式系数相等, 则该展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为________.

(16) 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长都相等, $\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为________.

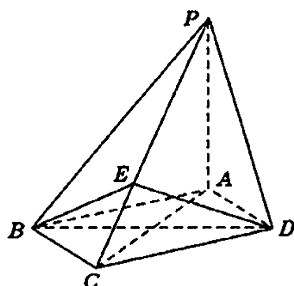
三、解答题: 本大题共6小题, 共70分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) **(本小题满分10分)**

$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $\cos(A-C)+\cos B=1$, $a=2c$, 求 C.

(18) **(本小题满分12分)**

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, E 是 PC 上的一点, $PE=2EC$.



(Ⅰ) 证明: $PC\perp$ 平面 BED;

(Ⅱ) 设二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 求 PD 与平面 PBC 所成角的大小.

(19) **(本小题满分12分)**

乒乓球比赛规则规定: 一局比赛, 双方比分在10平前, 一方连续发球2次后, 对方再连续发球2次, 依次轮换. 每次发球, 胜方得1分, 负方得0分. 设在甲、乙的比赛中, 每次发球, 发球方得1分的概率为0.6, 各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中, 甲先发球.

(Ⅰ) 求开始第4次发球时, 甲、乙的比分为1比2的概率;

(Ⅱ) ξ 表示开始第4次发球时乙的得分, 求 ξ 的期望.

(20) **(本小题满分12分)**

设函数 $f(x)=ax+\cos x$, $x\in[0,\pi]$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$, 求 a 的取值范围.

(21) **(本小题满分12分)**

已知抛物线 $C: y=(x+1)^2$ 与圆 $M: (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=r^2(r>0)$ 有一个公共点 A, 且在点 A 处两曲线的切线为同一直线 l.

(Ⅰ) 求 r;

(Ⅱ) 设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线, m、n 的交点为 D, 求 D 到 l 的距离.

(22) **(本小题满分12分)**

函数 $f(x)=x^2-2x-3$, 定义数列 $\{x_n\}$ 如下: $x_1=2$, x_{n+1} 是过两点 $P(4,5)$、$Q_n(x_n, f(x_n))$ 的直线 PQ_n 与 x 轴交点的横坐标.

(Ⅰ) 证明: $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$;

(Ⅱ) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

参考答案

一、选择题

(1) C. (2) B. (3) C. (4) D.
(5) A. (6) D. (7) A. (8) C.
(9) D. (10) A. (11) A. (12) B.

二、填空题

(13) -1. (14) $\frac{5\pi}{6}$. (15) 56. (16) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

三、解答题

(17) 解:

由 $B=\pi-(A+C)$, 得 $\cos B=-\cos(A+C)$.

于是 $\cos(A-C)+\cos B=\cos(A-C)-\cos(A+C)=2\sin A\sin C$.

由已知得

$\sin A\sin C=\frac{1}{2}$. ······················ ①

由 $a=2c$ 及正弦定理得

$\sin A=2\sin C$. ······················ ②

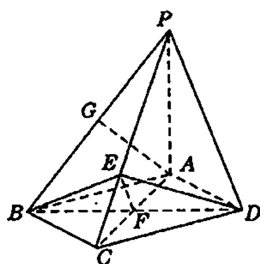
由①、②得

$\sin^2 C=\frac{1}{4}$,

于是 $\sin C=-\frac{1}{2}$ (舍去), 或 $\sin C=\frac{1}{2}$.

又 $a=2c$, 所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

(18) 解法一: (Ⅰ) 因为底面 $ABCD$ 为菱形, 所以 $BD\perp AC$, 又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PC\perp BD$.



设 $AC\bigcap BD=F$, 连结 EF. 因为 $AC=2\sqrt{2}$, $PA=2$, $PE=2EC$, 故

$PC=2\sqrt{3}$, $EC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $FC=\sqrt{2}$,

从而 $\dfrac{PC}{FC}=\sqrt{6}$, $\dfrac{AC}{EC}=\sqrt{6}$.

因为 $\dfrac{PC}{FC}=\dfrac{AC}{EC}$, $\angle FCE=\angle PCA$, 所以 $\triangle FCE\backsim\triangle PCA$, $\angle FEC=\angle PAC=90^\circ$, 由此知 $PC\perp EF$.

PC 与平面 BED 内两条相交直线 BD, EF 都垂直, 所以 $PC\perp$ 平面 BED.

(II) 在平面 PAB 内过点 A 作 $AG\perp PB$, G 为垂足.

因为二面角 $A-PB-C$ 为 90°, 所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.

又平面 $PAB\bigcap$ 平面 $PBC=PB$, 故 $AG\perp$ 平面 PBC, $AG\perp BC$.

BC 与平面 PAB 内两条相交直线 PA, AG 都垂直, 故 $BC\perp$ 平面 PAB, 于是 $BC\perp AB$, 所以底面 $ABCD$ 为正方形, $AD=2$, $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{2}$.

设 D 到平面 PBC 的距离为 d.

因为 $AD/\!/BC$, 且 $AD\not\subset$ 平面 PBC, $BC\subset$ 平面 PBC, 故 $AD/\!/$ 平面 PBC, A、D 两点到平面 PBC 的距离相等, 即 $d=AG=\sqrt{2}$.

设 PD 与平面 PBC 所成的角为 α, 则 $\sin\alpha=\dfrac{d}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

所以 PD 与平面 PBC 所成的角为 30°.

解法二: (I) 以 A 为坐标原点, 射线 AC 为 x 轴的正半轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

设 $C(2\sqrt{2},0,0)$, $D(\sqrt{2},b,0)$, 其中 $b>0$, 则

$P(0,0,2)$, $E\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$, $B(\sqrt{2},-b,0)$.

于是

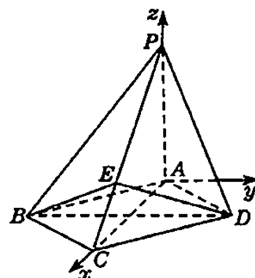
$\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{2},0,-2)$, $\overrightarrow{BE}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},b,\dfrac{2}{3}\right)$,

$\overrightarrow{DE}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},-b,\dfrac{2}{3}\right)$,

从而 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BE}=0$, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,

故 $PC\perp BE$, $PC\perp DE$.

又 $BE\bigcap DE=E$, 所以 $PC\perp$ 平面 BDE.



(II) $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$, $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-b,0)$.

设 $m=(x,y,z)$ 为平面 PAB 的法向量, 则 $m\cdot\overrightarrow{AP}=0$, $m\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

即 $2z=0$ 且 $\sqrt{2}x-by=0$,

令 $x=b$, 则 $m=(b,\sqrt{2},0)$.

设 $n=(p,q,r)$ 为平面 PBC 的法向量, 则 $n\cdot\overrightarrow{PC}=0$, $n\cdot\overrightarrow{BE}=0$,

即 $2\sqrt{2}p-2r=0$ 且 $\dfrac{\sqrt{2}p}{3}+bq+\dfrac{2}{3}r=0$,

令 $p=1$, 则 $r=\sqrt{2}$, $q=-\dfrac{\sqrt{2}}{b}$,

$n=\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{b},\sqrt{2}\right)$.

因为面 $PAB\perp$ 面 PBC, 故 $m\cdot n=0$, 即 $b-\dfrac{2}{b}=0$, 故 $b=\sqrt{2}$, 于是

$n=(1,-1,\sqrt{2})$, $\overrightarrow{DP}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$,

$\cos\langle n,\overrightarrow{DP}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{DP}}{|n||\overrightarrow{DP}|}=\dfrac{1}{2}$,

$\langle n,\overrightarrow{DP}\rangle=60^\circ$.

因为 PD 与平面 PBC 所成角和 $\langle n,\overrightarrow{DP}\rangle$ 互余, 故 PD 与平面 PBC 所成的角为 30°.

(19) 解:

记 A_i 表示事件: 第1次和第2次这两次发球, 甲共得 i 分, $i=0,1,2$;

A 表示事件: 第3次发球, 甲得1分;

B 表示事件: 开始第4次发球时, 甲、乙的比分为1比2.

(I) $B=A_0\cdot A+A_1\cdot\overrightarrow{A}$,

$P(A)=0.4$, $P(A_0)=0.4^2=0.16$, $P(A_1)=2\times0.6\times0.4=0.48$,

$P(B)=P(A_0\cdot A+A_1\cdot\overrightarrow{A})$

$= P(A_0 \cdot A) + P(A_1 \cdot \overrightarrow{A})$
$= P(A_0)P(A) + P(A_1)P(\overrightarrow{A})$
$= 0.16 \times 0.4 + 0.48 \times (1 - 0.4)$
$= 0.352.$

(II) $P(A_2) = 0.6^2 = 0.36.$

ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3.

$P(\xi=0)=P(A_2 \cdot A)=P(A_2)P(A) = 0.36 \times 0.4 = 0.144,$

$P(\xi = 2) = P(B) = 0.352,$

$P(\xi = 3) = P(A_0 \cdot \overrightarrow{A}) = P(A_0)P(\overrightarrow{A}) = 0.16 \times 0.6 = 0.096,$

$P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=2)-P(\xi=3) = 1 - 0.144 - 0.352 - 0.096 = 0.408.$

$E\xi = 0 \times P(\xi = 0) + 1 \times P(\xi = 1) + 2\times P(\xi = 2) + 3 \times P(\xi = 3) = 0.408 + 2 \times 0.352 + 3 \times 0.096 = 1.400.$

(20) 解:

(I) $f'(x) = a - \sin x.$

(i) 当 $a\geqslant 1$ 时, $f'(x)\geqslant 0$, 且仅当 $a=1$, $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x)= 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 是增函数;

(ii) 当 $a \leqslant 0$ 时, $f'(x) \leqslant 0$, 且仅当 $a = 0$, $x = 0$ 或 $x = \pi$ 时, $f'(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 是减函数;

(iii) 当 $0<a<1$ 时, 由 $f'(x)=0$ 解得 $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$.

当 $x \in [0,x_1)$ 时, $\sin x<a$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in (x_1,x_2)$ 时, $\sin x > a$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数;

当 $x \in (x_2,\pi]$ 时, $\sin x<a$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 是增函数.

(II) 由 $f(x)\leqslant 1+\sin x$ 得 $f(\pi) \leqslant 1$, $a\pi - 1 \leqslant 1$, 所以 $a \leqslant \frac{2}{\pi}$.

令 $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$,

则 $g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$.

当 $x \in \left(0, \arccos\frac{2}{\pi}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$.

又 $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 所以 $g(x) \geqslant 0$, 即 $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

当 $a \leqslant \frac{2}{\pi}$ 时, 有 $f(x) \leqslant \frac{2}{\pi}x + \cos x$.

(i) 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$, $\cos x \leqslant 1$, 所以 $f(x) \leqslant 1 + \sin x$;

(ii) 当 $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ 时, $f(x) \leqslant \frac{2}{\pi}x+\cos x = 1 + \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 + \sin x$.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

(21) 解:

(I) 设 $A(x_0,(x_0+1)^2)$, 对 $y = (x+1)^2$ 求导得 $y' = 2(x + 1)$.

故 l 的斜率 $k = 2(x_0 + 1)$.

当 $x_0 = 1$ 时, 不合题意, 所以 $x_0 \neq 1$.

圆心为 $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, MA 的斜率

$$k' = \frac{(x_0 + 1)^2 - \frac{1}{2}}{x_0 - 1}.$$

由 $l\perp MA$ 知 $k \cdot k' = -1$,

即 $2(x_0 + 1) \cdot \dfrac{(x_0 + 1)^2 - \frac{1}{2}}{x_0 - 1} = -1$,

解得 $x_0 = 0$, 故 $A(0, 1)$,

$$r=|MA|=\sqrt{(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

即 $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(II) 设 $(t,(t+1)^2)$ 为 C 上一点, 则在该点处的切线方程为

$y - (t + 1)^2 = 2(t + 1)(x - t)$,

即 $y = 2(t + 1)x - t^2 + 1$.

若该直线与圆 M 相切, 则圆心 M 到该切线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 即

$$\frac{\left|2(t + 1) \times 1 - \frac{1}{2} - t^2 + 1\right|}{\sqrt{[2(t + 1)]^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

化简得 $t^2(t^2 - 4t - 6) = 0$,

解得 $t_0 = 0, t_1 = 2 + \sqrt{10}, t_2 = 2 - \sqrt{10}$.

抛物线 C 在点 $(t_1,(t_1 + 1)^2)(i = 0, 1, 2)$ 处的切线分别为 l, m, n, 其方程分别为

$y = 2x + 1$, ························ ①

$y = 2(t_1 + 1)x - t_1^2 + 1$, ·············· ②

$y = 2(t_2 + 1)x - t_2^2 + 1$, ·············· ③

2012年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

本试卷共有23道试题, 满分150分, 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题共有14题, 满分56分)考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 计算: $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$________(i为虚数单位).

2. 若集合 $A=\{x|2x+1>0\}$, $B=\{x||x-1|<2\}$, 则 $A\cap B=$________.

3. 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2 & \cos x\\ \sin x & -1\end{vmatrix}$ 的值域是________.

4. 若 $\vec{n}=(-2,1)$ 是直线 l 的一个法向量, 则 l 的倾斜角的大小为________(结果用反三角函数值表示).

5. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于________.

6. 有一列正方体, 棱长组成以1为首项、$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$________.

7. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x-a|}$ (a为常数). 若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是________.

---

②-③得 $x=\dfrac{t_1+t_2}{2}=2$.

将 $x=2$ 代入②得 $y=-1$, 故 $D(2,-1)$.

所以 D 到 l 的距离

$$d=\frac{|2\times2-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt5}{5}.$$

(22) 解:

(Ⅰ) 用数学归纳法证明: $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$.

(i) 当 $n=1$ 时, $x_1=2$, 直线 PQ_1 的方程为

$$y-5=\frac{f(2)-5}{2-4}(x-4),$$

令 $y=0$, 解得 $x_2=\dfrac{11}{4}$, 所以 $2\leqslant x_1<x_2<3$.

(ii) 假设当 $n=k$ 时, 结论成立, 即 $2\leqslant x_k<x_{k+1}<3$.

直线 PQ_{k-1} 的方程为

$$y-5=\frac{f(x_{k+1})-5}{x_{k+1}-4}(x-4),$$

令 $y=0$, 解得 $x_{k+2}=\dfrac{3+4x_{k+1}}{2+x_{k+1}}$.

由归纳假设知

$$x_{k+2}=\frac{3+4x_{k+1}}{2+x_{k+1}}=4-\frac{5}{2+x_{k+1}}<4-\frac{5}{2+3}=3;$$

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{(3-x_{k+1})(1+x_{k+1})}{2+x_{k+1}}>0,$$

即 $x_{k+1}<x_{k+2}$.

所以 $2\leqslant x_{k+1}<x_{k+2}<3$, 即当 $n=k+1$ 时, 结论成立.

由(i)、(ii)知对任意的正整数 n, $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)及题意得 $x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{2+x_n}$.

设 $b_n=x_n-3$, 则

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{5}{b_n}+1,$$

$$\frac{1}{b_n+1}+\frac{1}{4}=5\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{4}\right),$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{4}\right\}$ 是首项为 $-\dfrac{3}{4}$, 公比为5的等比数列.

因此 $\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}\cdot5^{n-1}$,

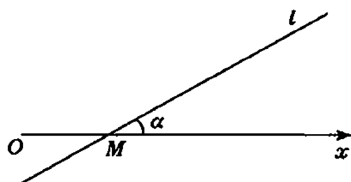
即 $b_n=-\dfrac{4}{3\cdot5^{n-1}+1}$,

所以数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=3-\dfrac{4}{3\cdot5^{n-1}+1}$.

8. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为2π的半圆面, 则该圆锥的体积为________.

9. 已知$y=f(x)+x^2$是奇函数, 且$f(1)=1$. 若$g(x)=f(x)+2$, 则$g(-1)=$________.

10. 如图, 在极坐标系中, 过点$M(2,0)$的直线l与极轴的夹角$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. 若将l的极坐标方程写成$\rho=f(\theta)$的形式, 则$f(\theta)=$________.

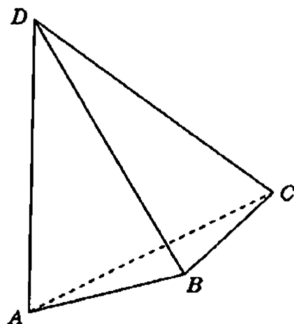


11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人都选择其中两个项目, 则有且仅有两个选择的项目完全相同的概率是________(结果用最简分数表示).

12. 在平行四边形$ABCD$中, $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$, 边AB、AD的长分别为2、1. 若M、N分别是边BC、CD上的点, 且满足$\dfrac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是________.

13. 已知函数$y=f(x)$的图像是折线段ABC, 其中$A(0,0)$、$B\left(\dfrac{1}{2},5\right)$、$C(1,0)$. 函数$y=xf(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$的图像与$x$轴围成的图形的面积为________.

14. 如图, AD与BC是四面体$ABCD$中互相垂直的棱, $BC=2$. 若$AD=2c$, 且$AB+BD=AC+CD=2a$, 其中a、c为常数, 则四面体$ABCD$的体积的最大值是________.



二、选择题 (本大题共有4题, 满分20分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分.

15. 若$1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$是关于x的实系数方程$x^2+bx+c=0$的一个复数根, 则 [答]( )

(A) $b=2$, $c=3$. (B) $b=-2$, $c=3$.

(C) $b=-2$, $c=-1$. (D) $b=2$, $c=-1$.

16. 在$\triangle ABC$中, 若$\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$, 则$\triangle ABC$的形状是 [答]( )

(A) 锐角三角形. (B) 直角三角形.

(C) 钝角三角形. (D) 不能确定.

17. 设$10\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4\leqslant 10^4$, $x_5=10^5$. 随机变量ξ_1取值x_1、x_2、x_3、x_4、x_5的概率均为0.2. 随机变量ξ_2取值$\dfrac{x_1+x_2}{2}$、$\dfrac{x_2+x_3}{2}$、$\dfrac{x_3+x_4}{2}$、$\dfrac{x_4+x_5}{2}$、$\dfrac{x_5+x_1}{2}$的概率也均为0.2. 若记$D\xi_1$、$D\xi_2$分别为ξ_1、ξ_2的方差, 则 [答]( )

(A) $D\xi_1>D\xi_2$. (B) $D\xi_1=D\xi_2$.

(C) $D\xi_1<D\xi_2$.

(D) $D\xi_1$与$D\xi_2$的大小关系与x_1、x_2、x_3、x_4的取值有关.

18. 设$a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{25}$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 在S_1, S_2, $\cdots$, S_{100}中, 正数的个数是 [答]( )

(A) 25. (B) 50. (C) 75. (D) 100.

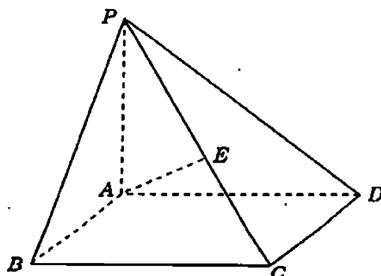
三、解答题 (本大题共有5题, 满分74分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19. (本题满分12分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分6分.

如图, 在四棱锥$P-ABCD$中, 底面$ABCD$是矩形, $PA\perp$底面$ABCD$, E是PC的中点. 已知$AB=2$, $AD=2\sqrt{2}$, $PA=2$. 求:

(1) 三角形PCD的面积;

(2) 异面直线BC与AE所成的角的大小.



20. (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.

(1) 若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$，求 x 的取值范围;

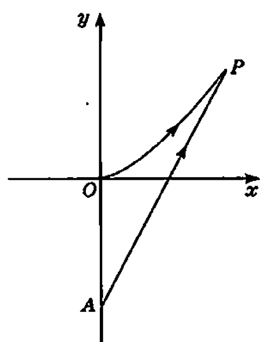
(2) 若 $g(x)$ 是以2为周期的偶函数，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $g(x)=f(x)$，求函数 $y=g(x)$ $(x\in[1,2])$ 的反函数.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系(以1海里为单位长度)，则救援船恰好在失事船正南方向12海里 A 处，如图. 现假设：① 失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\frac{12}{49}x^2$；② 定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③ 救援船出发 t 小时后，失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1) 当 $t=0.5$ 时，写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向;

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?



22. (本题满分16分) 本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C_1:2x^2-y^2=1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行线，求该直线与另一条渐近线及 x 轴围成的三角形的面积;

(2) 设斜率为1的直线 l 交 C_1 于 P、Q 两点. 若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求证：$OP\perp OQ$;

(3) 设椭圆 $C_2:4x^2+y^2=1$. 若 M、N 分别是 C_1、C_2 上的动点，且 $OM\perp ON$，求证：O 到直线 MN 的距离是定值.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，$n\geqslant 2$，定义向量集 $Y=\{\vec{a}|\vec{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$. 若对任意 $\vec{a_1}\in Y$，存在 $\vec{a_2}\in Y$，使得 $\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$，则称 X 具有性质 $\mathbf{P}$. 例如 $\{-1,1,2,\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$.

(1) 若 $x>2$，且 $\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$，求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$，求证：$1\in X$，且当 $x_n>1$ 时，$x_1=1$;

(3) 若 X 具有性质 $\mathbf{P}$，且 $x_1=1$、$x_2=q$ (q 为常数)，求有穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的通项公式.

答案要点

一、(第1题至第14题)

1. $1-2i$. 2. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$. 3. $\left[-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right]$.

4. $\arctan 2$. 5. -160. 6. $\frac{8}{7}$.

7. $(-\infty,1]$. 8. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. 9. -1.

10. $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$. 11. $\frac{2}{3}$. 12. $[2,5]$.

13. $\frac{5}{4}$. 14. $\frac{2}{3}c\sqrt{a^2-c^2-1}$.

二、(第15题至第18题)

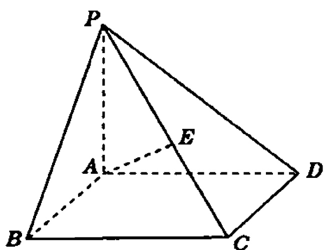
题号	15	16	17	18
代号	B	C	A	D

三、(第19题至第23题)

19. [解] (1) 因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，又 $AD\perp CD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，从而 $CD\perp PD$.

因为 $PD=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，$CD=2$，

所以三角形 PCD 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

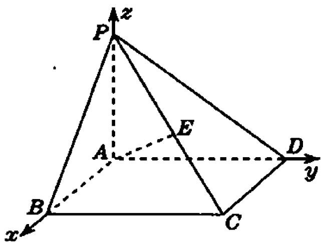


(2) [解法一] 如图所示, 建立空间直角坐标系, 则 $B(2,0,0)$, $C(2,2\sqrt{2},0)$, $E(1,\sqrt{2},1)$, $\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{2},1)$, $\overrightarrow{BC}=(0,2\sqrt{2},0)$.

设 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ, 则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{4}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$.

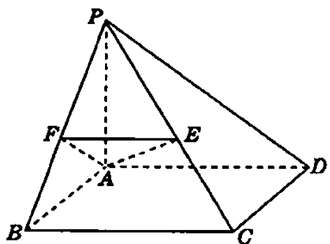


由此知, 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$.

[解法二] 取 PB 中点 F, 连接 EF、AF, 则 $EF//BC$, 从而 $\angle AEF$ (或其补角) 是异面直角 BC 与 AE 所成的角.

在 ΔAEF 中, 由 $EF=\sqrt{2}$、$AF=\sqrt{2}$、$AE=2$ 知 ΔAEF 是等腰直角三角形, 所以 $\angle AEF=\frac{\pi}{4}$.

因此, 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$.



20. [解] (1) 由 $\begin{cases}2-2x>0,\\x+1>0\end{cases}$ 得 $-1<x<1$.

由 $0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1$ 得 $1<\frac{2-2x}{x+1}<10$. 因为 $x+1>0$, 所以

$x+1<2-2x<10x+10$, $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

由 $\begin{cases}-1<x<1,\\-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\end{cases}$ 得 $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

(2) 当 $x\in[1,2]$ 时, $2-x\in[0,1]$, 因此

$y=g(x)=g(x-2)=g(2-x)=f(2-x)=\lg(3-x)$.

由单调性可得 $y\in[0,\lg 2]$.

因为 $x=3-10^y$, 所以所求反函数是 $y=3-10^x$, $x\in[0,\lg 2]$.

21. [解] (1) $t=0.5$ 时, P 的横坐标 $x_p=7t=\frac{7}{2}$, 代入抛物线方程 $y=\frac{12}{49}x^2$, 得 P 的纵坐标 $y_p=3$.

由 $|AP|=\frac{\sqrt{949}}{2}$, 得救援船速度的大小为 $\sqrt{949}$ 海里/时.

由 $\tan\angle OAP=\frac{7}{30}$, 得 $\angle OAP=\arctan\frac{7}{30}$, 故救援船速度的方向为北偏东 $\arctan\frac{7}{30}$ 弧度.

(2) 设救援船的时速为 v 海里, 经过 t 小时追上失事船, 此时位置为 $(7t,12t^2)$.

由 $vt=\sqrt{(7t)^2+(12t^2+12)^2}$,

整理得 $v^2=144\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+337$.

因为 $t^2+\frac{1}{t^2}\geqslant 2$, 当且仅当 $t=1$ 时等号成立,

所以 $v^2\geqslant 144\times 2+337=25^2$, 即 $v\geqslant 25$.

因此, 救援船的时速至少是 25 海里才能追上失事船.

22. [解] (1) 双曲线 $C_1:\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1$, 左顶点 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, 渐近线方程: $y=\pm\sqrt{2}x$.

过点 A 与渐近线 $y=\sqrt{2}x$ 平行的直线方程为 $y=\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 即 $y=\sqrt{2}x+1$.

解方程组 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}x,\\y=\sqrt{2}x+1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4},\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以所求三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}|OA||y|=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

(2) 设直线 PQ 的方程是 $y=x+b$, 因直线 PQ 与已知圆相切, 故 $\frac{|b|}{\sqrt{2}}=1$, 即 $b^2=2$.

由 $\begin{cases}y=x+b,\\2x^2-y^2=1\end{cases}$ 得 $x^2-2bx-b^2-1=0$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 则$\begin{cases}x_1+x_2=2b,\\x_1x_2=-1-b^2.\end{cases}$

又 $y_1y_2=(x_1+b)(x_2+b)$, 所以

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=2(-1-b^2)+2b^2+b^2=b^2-2=0$.

故 $OP\perp OQ$.

(3) 当直线 ON 垂直于 x 轴时,

$|ON|=1$, $|OM|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 O 到直线 MN 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

当直线 ON 不垂直于 x 轴时,

设直线 ON 的方程为 $y=kx$ $\left(\text{显然}\ |k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

则直线 OM 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$.

由 $\begin{cases}y=kx,\\4x^2+y^2=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{4+k^2},\\y^2=\dfrac{k^2}{4+k^2},\end{cases}$

所以 $|ON|^2=\dfrac{1+k^2}{4+k^2}$.

同理 $|OM|^2=\dfrac{1+k^2}{2k^2-1}$.

设 O 到直线 MN 的距离为 d.

因为 $(|OM|^2+|ON|^2)d^2=|OM|^2|ON|^2$,

所以 $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{|OM|^2}+\dfrac{1}{|ON|^2}=\dfrac{3k^2+3}{k^2+1}=3$,

即 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

综上, O 到直线 MN 的距离是定值.

23. [解] (1) 选取 $\overrightarrow{a_1}=(x,2)$, Y 中与 $\overrightarrow{a_1}$ 垂直的元素必有形式 $(-1,b)$.

所以 $x=2b$, 从而 $x=4$.

(2) 证明: 取 $\overrightarrow{a_1}=(x_1,x_1)\in Y$. 设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$.

由 $(s+t)x_1=0$ 得 $s+t=0$, 所以 s,t 异号.

因为 -1 是 X 中唯一的负数, 所以 s,t 之中一为 -1, 另一为 1, 故 $1\in X$.

假设 $x_k=1$, 其中 $1<k<n$, 则 $0<x_1<1<x_n$.

选取 $\overrightarrow{a_1}=(x_1,x_n)\in Y$, 并设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$ 满足 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}=0$, 即 $sx_1+tx_n=0$, 则 s,t 异号, 从而 s,t 之中恰有一个为 -1.

若 $s=-1$, 则 $x_1=tx_n>t\geqslant x_1$, 矛盾;

若 $t=-1$, 则 $x_n=sx_1<s\leqslant x_n$, 矛盾.

所以 $x_1=1$.

(3) [解法一] 猜测 $x_i=q^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$.

记 $A_k=\{-1,1,x_2,\cdots,x_k\}$, $k=2,3,\cdots,n$.

先证明: 若 A_{k+1} 具有性质 $\mathbf{P}$, 则 A_k 也具有性质 $\mathbf{P}$.

任取 $\overrightarrow{a_1}=(s,t)$, $s,t\in A_k$. 当 s,t 中出现 -1 时, 显然有 $\overrightarrow{a_2}$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$;

当 $s\neq-1$ 且 $t\neq-1$ 时, 则 $s,t\geqslant1$.

因为 A_{k+1} 具有性质 $\mathbf{P}$, 所以有 $\overrightarrow{a_2}=(s_1,t_1)$, $s_1,t_1\in A_{k+1}$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$, 从而 s_1 和 t_1 中有一个是 -1, 不妨设 $s_1=-1$.

假设 $t_1\in A_{k+1}$ 且 $t_1\notin A_k$, 则 $t_1=x_{k+1}$. 由 $(s,t)\cdot(-1,x_{k+1})=0$, 得 $s=tx_{k+1}\geqslant x_{k+1}$, 与 $s\in A_k$ 矛盾.

所以 $t_1\in A_k$. 从而 A_k 也具有性质 $\mathbf{P}$.

现用数学归纳法证明: $x_i=q^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$.

当 $n=2$ 时, 结论显然成立;

假设 $n=k$ 时, $A_k=\{-1,1,x_2,\cdots,x_k\}$ 有性质 $\mathbf{P}$, 则 $x_i=q^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,k$;

当 $n=k+1$ 时, 若 $A_{k+1}=\{-1,1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$ 有性质 $\mathbf{P}$, 则 $A_k=\{-1,1,x_2,\cdots,x_k\}$ 也有性质 $\mathbf{P}$, 所以 $A_{k+1}=\{-1,1,q,\cdots,q^{k-1},x_{k+1}\}$.

取 $\overrightarrow{a_1}=(x_{k+1},q)$, 并设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$. 由此可得 $s=-1$ 或 $t=-1$.

若 $t=-1$, 则 $x_{k+1}=\dfrac{q}{s}\leqslant q$, 不可能;

所以 $s=-1$, $x_{k+1}=qt=q^j\leqslant q^k$ 且 $x_{k+1}>q^{k-1}$, 所以 $x_{k+1}=q^k$.

综上所述, $x_i=q^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$.

[解法二] 设 $\overrightarrow{a_1}=(s_1,t_1)$, $\overrightarrow{a_2}=(s_2,t_2)$, 则 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$ 等价于 $\dfrac{s_1}{t_1}=-\dfrac{t_2}{s_2}$.

记 $B=\left\{\dfrac{s}{t}\middle|s\in X,t\in X,|s|>|t|\right\}$, 则数集 X 具有性质 $\mathbf{P}$ 当且仅当数集 B 关于原点对称.

注意到 -1 是 X 中的唯一负数, $B\cap(-\infty,0)=\{-x_2,-x_3,\cdots,-x_n\}$ 共有 $n-1$ 个数, 所以 $B\cap(0,+\infty)$ 也只有 $n-1$ 个数.

由于 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}<\dfrac{x_n}{x_{n-2}}<\cdots<\dfrac{x_n}{x_2}<\dfrac{x_n}{x_1}$, 已有 $n-1$ 个数, 对以下三角数阵

$$\begin{array}{l}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}<\dfrac{x_n}{x_{n-2}}<\cdots<\dfrac{x_n}{x_2}<\dfrac{x_n}{x_1}\\ \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}<\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-3}}<\cdots<\dfrac{x_{n-1}}{x_1},\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{x_2}{x_1}\end{array}$$

注意到 $\dfrac{x_n}{x_1}>\dfrac{x_{n-1}}{x_1}>\cdots>\dfrac{x_2}{x_1}$, 所以 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=\cdots=\dfrac{x_2}{x_1}$, 从而数列的通项为 $x_k=x_1\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{k-1}=q^{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$.

编后漫笔

也谈中学里为什么要学微积分?

张奠宙 赵小平

进入21世纪，我国的《普通高中数学课程标准》把微积分列入中学的必修内容，进展顺利. 与此同时，上海二期课改的课程标准却把一期课改已经进入高中课程的微积分删除了，令人诧异. 近闻上海数学课程标准正在修订，有意恢复微积分内容，做到全国一致.

不过，中学生要不要学微积分? 为什么要学微积分，还存在着不少分歧.

反对在中学学习微积分的意见认为，中学学习微积分不深不透，煮成了夹生饭，还是到大学里一气呵成为好. 中小学打好初等数学基础，才是最重要的. 有一种意见是把微积分当做一种运算工具，学生学会求导数、积分，能用来研究函数性质，解决有关函数问题，例如用导数研究函数的单调性和极值问题等. 至于微积分的理论，还是留待大学去学习. 这相当于从前的《初等微积分》. 又一种意见是，要么不学，要学就得原原本本地弄清楚. 从数列极限、函数极限、连续、可导、中值定理、积分、微积分基本定理，一样不能少.

那么，是否还可以有另一种思路，把微积分当做文化来学习. 也就是说，一般中学生学习微积分的目的在于体验和欣赏一种变量数学的文化，重点放在常量与变量，曲与直，平均速度与瞬时速度，整体与局部等数学思想方法上，展现牛顿那个时代的数学创新风貌. 学生所获得的是微积分所带来的一种心灵震撼，体会到初等数学到高等数学的一种思想观念上的升华. 这里不追求完整的系统阐述，只用常识来理解极限. 求导、求积分的论证可以只限于多项式函数，其余的内容，如导数表，微分中值定理、微积分基本定理，都作为结论推出，不加证明. 这样做，教学时数不会太多，20—30学时也许就够了.

我们诵读一首唐诗，欣赏一幅名画，观看一部戏剧，听取一段音乐，并不要求会写诗、会作画、会演戏、会作曲，重在感染、熏陶. 事实上，中学里的原子物理内容，生物学里讲DNA、RNA，也是对已经发现的事实进行陈述和欣赏，让学生当做一种科学常识加以接受.

细细想来，高中生毕业后从事各行各业的工作，除非是理工、金融等行业，大多数学生一辈子不会去求一个函数的导数. 但是，你作为一个新闻记者在采访的时候、一个外文翻译在翻译过程中、一名公务员在接触交往过程中，难免听到有关微积分的内容. 这时如能大体了解、从容应对，当是一种优秀的素质.

至于一些有志于从事理工研究的中学生，我们应该有一门高级的微积分选修课，原原本本地讲微积分，到大学里可以免修. 这不过是一种设想，需要实验研究. 作为改革开放排头兵的上海，试一试如何?

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第7期(总第299期)

名誉主编: 张奠宙
主编: 赵小平
常务副主编: 忻重义
发行范围: 公开
电话: 021-62232712

主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学
出版: 上海《数学教学》杂志社
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 3100720050001
印刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元 国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4 每月12日出版 代号: 4-357